RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1910.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili.* Nota del Socio Vito Volterra.

§ 1. — Il problema fondamentale.

1. Ho chiamato *funzioni permutabili* [1] due funzioni finite e continue tali che

$$\text{(I)} \qquad \int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi .$$

Supponendo ora

$$0 \leq x \leq y \leq a$$

e $F(x,x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a, proponiamoci il problema di cercare tutte le funzioni $\Phi(x,y)$ permutabili con $F(x,y)$.

2. Eseguiamo un cambiamento di variabili ponendo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1) ,$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le dette equazioni possano invertirsi univocamente. Avremo

$$(1) \qquad \int_{x_1}^{y_1} F(x_1,\xi_1)\,\Phi(\xi_1,y_1)\,f'(\xi_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi(x_1,\xi_1)\,F(\xi_1,y_1)\,f'(\xi_1)\,d\xi_1$$

[1] Vedi la Nota del 20 febbraio 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Ivi ho distinto le permutabilità di 1ª e 2ª specie. In questa Nota mi occuperò della permutabilità di 1ª specie che ho anche chiamato semplicemente permutabilità.

quindi, ponendo

$$(2)\qquad \begin{aligned} \pm\sqrt{f'(x_1)\,f'(y_1)}\;\Phi(x_1,y_1) &= \Phi_1(x_1,y_1)\,,\\ \pm\sqrt{f'(x_1)\,f'(y_1)}\;\mathrm{F}(x_1,y_1) &= \mathrm{F}_1(x_1,y_1)\,, \end{aligned}$$

sarà

$$\int_{x_1}^{y_1} \mathrm{F}_1(x_1,\xi_1)\,\Phi_1(\xi_1,y_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi_1(x_1,\xi_1)\,\mathrm{F}_1(\xi_1,y_1)\,d\xi_1\,.$$

Ora prendendo

$$f'(x_1) = \frac{\pm 1}{\mathrm{F}(x_1,x_1)}$$

potremo scegliere i segni in modo che $f'(x_1)$ resulti positivo e $\mathrm{F}_1(x_1,x_1)=1$.

Si potrà dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ridurre la ricerca al caso in cui $\mathrm{F}(x,x)=1$.

3. Premessa questa riduzione, si ponga, supponendo $\alpha(x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a,

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(x,y)\,\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = \mathrm{F}'(x,y)\\[2ex] \Phi(x,y)\,\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = \Phi'(x,y) \end{cases}$$

È evidente che, se F e Φ sono permutabili, lo saranno pure $\mathrm{F}'(x,y)$ e $\Phi'(x,y)$. Ciò posto scriviamo

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial x} = \mathrm{F}_1(x,y)\;,\quad \frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial y} = \mathrm{F}_2(x,y)$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}'(x,y)}{\partial x} = \mathrm{F}'_1(x,y)\;,\quad \frac{\partial \mathrm{F}'(x,y)}{\partial y} = \mathrm{F}'_2(x,y)\,.$$

Avremo facilmente che

$$\mathrm{F}'_1(x,x) = \mathrm{F}_1(x,x) + \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\,,$$

quindi, preso

$$\alpha(x) = e^{-\int \mathrm{F}_1(x,x)\,dx}\,,$$

resulterà

$$\mathrm{F}'_1(x,x) = 0\,.$$

Ma

$$\mathrm{F}'(x,x) = 1\,,$$

quindi sarà anche

$$\mathrm{F}'_2(x,x) = 0\,.$$

Ne segue che, *con una nuova trasformazione, potremo ricondurci al caso in cui si cerchino le funzioni permutabili con* $F(x,y)$, *essendo*

$$F(x,x)=1 \quad , \quad F_1(x,x)=0 \quad , \quad F_2(x,x)=0 . \tag{4}$$

4. Supposte soddisfatte le (4) poniamo

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi=\Psi(x,y) \tag{I'}$$

avremo $\Psi(x,x)=0$, e

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}=\Phi(x,y)+\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)\,d\xi \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}=-\Phi(x,y)+\int_x^y F_1(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi . \tag{6}$$

Scriviamo poi

$$F_2(x,y)-F_2^2(x,y)+F_2^3(x,y)-\cdots=f_2(x,y),$$
$$F_1(x,y)+F_1^2(x,y)+F_1^3(x,y)+\cdots=f_1(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$\Phi(x,y)=\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}-\int_x^y \frac{\partial\Psi(x,\xi)}{\partial\xi}\,f_2(\xi,y)\,d\xi \tag{5'}$$

$$\Phi(x,y)=-\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}-\int_x^y f_1(x,\xi)\,\frac{\partial\Psi(\xi,y)}{\partial\xi}\,d\xi , \tag{6'}$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}+\int_x^y\left[f_1(x,\xi)\,\frac{\partial\Psi(\xi,y)}{\partial\xi}-\frac{\partial\Psi(x,\xi)}{\partial\xi}\,f_2(\xi,y)\right]d\xi=0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x,x)=\Psi(y,y)=f_1(x,x)=f_2(y,y)=0 ,$$

si avrà

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}+\int_x^y[\Psi(x,\xi)\,g_{12}(\xi,y)-\Psi(\xi,y)\,g_{21}(x,\xi)]\,d\xi=0 \tag{A}$$

ove

$$g_{12}(x,y)=\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x,y)=\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} .$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x,y)$, *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. — Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x , \xi)\, g_{12}(\xi , y) - \Psi(\xi , y)\, g_{21}(x , \xi)]\, d\xi = \lambda(x , y) ,$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x , y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x , y)}{\partial y} + \lambda(x , y) = 0 .$$

Sia

$$u = \frac{y - x}{2} \quad , \quad v = \frac{y + x}{2} ;$$

considerando Ψ come funzione di u e v l'equazione precedente diverrà

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \lambda(x , y) = 0$$

onde

$$\Psi(x , y) = \theta(u) - \int_u^v \lambda(\zeta - u , \zeta + u)\, d\zeta ,$$

in cui θ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

Ne segue che

$$(A') \qquad \Psi(x , y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta - u}^{\zeta + u} [[\Psi(\zeta - u , \xi)\, g_{12}(\xi , \zeta + u) - \Psi(\xi , \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u , \xi)]\, d\xi .$$

6. Dimostriamo ora il teorema: *Scelta la funzione θ la funzione Ψ è determinata,* ossia *se $\theta = 0$ anche $\Psi = 0$.*

Il procedimento che può tenersi per tale dimostrazione è analogo a quello che ho impiegato in casi simili di equazioni integrali ed integro-differenziali (1).

Infatti sia $\theta = 0$ e $|\Psi(x , y)| < M$, mentre $|g_{12}| < N$ e $|g_{21}| < N$. Dalla (A') resulterà

$$|\Psi(x , y)| < 2MN(y - x)\, x ,$$

e per conseguenza

$$|\Psi(x , y)| < 2MN(y - x)\, a$$

(1) Cfr. *Sulla inversione degli integrali definiti,* Atti Acc. di Torino, 1896, Nota I, § 2. *Sulle equazioni integro-differenziali,* Rend. Acc. dei Lincei, febbraio 1909, § 3.

da cui segue

$$|\Psi(x,y)| < 2MN^2a\int_u^v d\zeta\int_{\zeta-u}^{\zeta+u}[(\xi-\zeta+u)+(\zeta+u-\xi)]\,d\xi$$

$$< 4MN^2a^2\frac{(y-x)^2}{1.2}\,.$$

Così proseguendo si dimostra che

$$|\Psi(x,y)| < 2^hMN^ha^h\frac{(y-x)^h}{h!}\,,$$

qualunque sia il numero intero e positivo h, e quindi $\Psi(x,y)=0$.

7. Passiamo adesso alla effettiva risoluzione dell'equazione integrale (A).

Consideriamo la serie

$$\sum_1^\infty \Psi_n(\eta\,|\,x,y) \tag{7}$$

i cui termini sono ottenuti colla operazione ricorrente

$$(8)\ \Psi_n(\eta\,|\,x,y)=\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_{n-1}(\eta|\zeta+u-\xi,\zeta+u)g_{21}(\zeta-u,\zeta+u-\xi)-$$

$$-\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u,\xi+\zeta-u)\,g_{12}(\xi+\zeta-u,\zeta+u)]\,d\xi\,.$$

$\Psi_1=1$.

Si dimostra facilmente che

$$\Psi_n(\eta\,|\,x,y) < \frac{[2Na(y-x-\eta)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

e quindi la serie (7) è uniformemente convergente.

Si formi poi

$$\Psi(x,y)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\sum_1^\infty\Psi_n(\eta\,|\,x,y)\,d\eta \tag{B}$$

essa sarà la soluzione della (A'), quando si prenda

$$\theta(u)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\,d\eta\,.$$

Per mezzo della (5') o della (6') otterremo poi Φ.

Si verifica senza alcuna difficoltà che, sostituendo la espressione (B) nella (A'), questa resta identicamente soddisfatta. Inoltre, percorrendo in senso inverso il cammino fatto per ottenere dalla (1) la (A'), si dimostra pure facilmente che F e Φ sono permutabili.

§ 3. — Teoremi sulle funzioni permutabili.

8. Dalla (B) segue

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{y-x} = \psi(0) = \text{cost}.$$

Ma dalla (I') si ha

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{y-x} = \lim_{y=x} \frac{\int_x^y \mathrm{F}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi}{y-x} = \Phi(x,x),$$

quindi sarà

$$\Phi(x,x) = \text{cost}.$$

Questa proprietà vale per le funzioni $\mathrm{F}(x,y)$ e $\Phi(x,y)$ che abbiamo ottenute per mezzo delle trasformazioni (2) e (3) in modo da ridurre la F a soddisfare alle condizioni (4). Ora, se vogliamo tornare alle funzioni primitive, dovremo dividere ambedue per la stessa funzione $\frac{\alpha(x)}{\alpha(y)}\sqrt{f'(x)\,f'(y)}$, quindi potremo enunciare il

Teorema I. — *Se* $\Phi(x,y)$ *è una funzione permutabile con* $\mathrm{F}(x,y)$ *tale che* $\mathrm{F}(x,x) \gtrless 0$, *avremo*

$$\frac{\Phi(x,x)}{\mathrm{F}(x,x)} = \text{cost}.$$

9. Teorema II. — *Se le funzioni permutabili* $\mathrm{F}(x,y)$ *e* $\Psi(x,y)$, *aventi le derivate determinate e finite, sono tali che*

$$\mathrm{F}(x,x) \gtrless 0 \quad \Psi(x,x) = 0,$$

si potrà determinare la funzione $\Phi(x,y)$, *permutabile con esse, in modo che*

$$\mathrm{F}\Phi(x,y) = \Psi(x,y)\ (^1).$$

Infatti, posto

$$\int_x^y \Phi(x,\xi)\,\mathrm{F}(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y),$$

(1) Vedi la notaztone adottata per la composizione di due funzioni permutabili: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 1.

derivando rispetto ad y [1], otterremo l'equazione di seconda specie

$$(9) \qquad F(y,y)\,\Phi(x,y)+\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)=\Psi_2(x,y),$$

in cui

$$F_2(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\quad,\quad \Psi_2(x,y)=\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.$$

Valendosi della trasformazione indicata nel § 1, art. 2, si potrà supporre per semplicità $F(y,y)=1$, e allora l'equazione integrale (9) si risolverà per mezzo della relazione (Vedi § 1, art. 4)

$$(10) \qquad \Phi(x,y)=\Psi_2(x,y)-\int_x^y \Psi_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi,$$

mentre avremo [2]

$$(11) \qquad f_2(x,y)-F_2(x,y)+\int_x^y F_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi=0.$$

Mostriamo che la $\Phi(x,y)$ data dalla (10) è permutabile con $F(x,y)$.

Moltiplicando ambo i membri della (9) per dy, integrando fra x e y e tenendo presente che $\Psi(x,x)=0$ si avrà che

$$(12) \qquad \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi=\Psi(x,y).$$

Formiamo ora

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi$$

sostituendo a $\Phi(\xi,\eta)$ il valore dato dalla (10), e osserviamo che in virtù della permutabilità di F e Ψ si ha

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Psi(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Psi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi$$

e quindi, con una derivazione rispetto ad y,

$$(13) \qquad \int_x^y F(x,\xi)\,\Psi_2(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Psi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)\,d\xi+\Psi(x,y),$$

giacchè per ipotesi $F(y,y)=1$, $\Psi(y,y)=0$.

[1] Cfr. per la risoluzione delle equazioni integrali di 1ª specie la Nota *Sulla inversione degli integrali definiti*. Rend. Acc. dei Lincei, 1896, § 4.

[2] Cfr. Nota precedente § 2. Annali di Mat., 1897, *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, § 10: principio di reciprocità.

Si avrà in conseguenza

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y) + \int_x^y \Psi(x,\xi)\,F_2(\xi,y) - \int_x^y F(x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y \Psi_2(\xi,\eta)\,f_2(\eta,y)\,d\eta$$

e con facili trasformazioni di calcolo, impiegando le relazioni (13) e (11) si otterrà

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y),$$

da cui segue, a cagione della (12), la permutabilità delle funzioni F e Φ e quindi delle funzioni Ψ e Φ.

Osservazione. — Dalla relazione (10) si deduce facilmente che, se Ψ e F avranno le derivate determinate e finite di ordine n, Φ avrà le derivate di ordine $n-1$ pure determinate e finite.

10. Una funzione $\Psi(x,y)$ che, al pari della $F(x,y)$, è tale che $\Psi(x,x) \gtrless 0$, si dirà di *primo ordine*, mentre se sarà $\Psi(x,x) = 0$ si dirà di *ordine superiore al primo*. In virtù del teorema I avremo che una funzione permutabile con una funzione di 1° ordine, o è di 1° ordine, o è di ordine superiore al primo. Supponiamo che si presenti questo caso e supponiamo che esistano le derivate successive di Ψ e siano determinate e finite; allora si potrà porre, in virtù del teorema II,

$$FF_1(x,y) = \Psi(x,y),$$

in cui F_1 è permutabile con F. Se F_1 sarà di primo ordine Ψ si dirà di *secondo ordine*; se F_1 sarà di secondo ordine Ψ si dirà di *terzo ordine*, e così di seguito; se F_1 sarà di ordine $n-1$, Ψ si dirà di *ordine n*; e Ψ si dirà di *ordine superiore ad n* se F_1 sarà di ordine superiore ad $n-1$.

11. Ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione i teoremi seguenti:

Teorema III. — *Se le funzioni di primo ordine* $F_1, F_2, \ldots F_g$ *sono permutabili fra loro e colla funzione* Ψ *di ordine n, avremo*

$$\Psi(x,y) = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_g^{\alpha_g} \Phi(xy) \tag{14}$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_g$ *sono numeri interi positivi soggetti alla sola condizione*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_g = n - 1$$

e Φ *è di primo ordine e permutabile colle* $F_1, F_2, \ldots F_g$.

Reciprocamente, se Ψ *può mettersi sotto la forma precedente, essa è di ordine n.*

Teorema IV. — *Se la funzione* $\Psi(x, y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x, y)$, *è tale che il*

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{(y - x)^{n-1}}$$

è finito e diverso da zero, $\Psi(x, y)$ *sarà di ordine* n.

Teorema V. — *Se la funzione* $\Psi(x, y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x, y)$, *è di ordine* n, *sarà*

$$\frac{1}{[F_1(x, x)]^n} \lim \frac{\Psi(x, y)}{(y - x)^{n-1}} = \text{cost} \gtrless 0.$$

Osservazione. — Supponendo che Ψ abbia la forma (14), posto

$$\frac{F_2(x, x)}{F_1(x, x)} = c_2, \frac{F_3(x, x)}{F_1(x, x)} = c_3, \ldots \frac{F_g(x, x)}{F_1(x, x)} = c_g, \frac{\Phi(x, x)}{F_1(x, x)} = c,$$

la costante che figura nel teorema precedente sarà

$$\frac{c_2^{\alpha_2} c_3^{\alpha_3} \ldots c_g^{\alpha_g} c}{(n - 1)!}.$$

12. Sia $\Psi(x, y)$ una funzione permutabile colla funzione di primo ordine $F(x, y)$ e supponiamo che ambedue queste funzioni abbiano le derivate successive determinate e finite.

Poniamo la costante $\frac{\Psi(x, x)}{F(x, x)} = c_1$ (vedi teorema I) e consideriamo

$$\Psi(x, y) - c_1 F(x, y);$$

questa funzione sarà permutabile con $F(x, y)$ e sarà di ordine superiore al primo, quindi (teorema II)

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + \int_x^y F(x, \xi) \Phi_1(\xi, y) \, d\xi,$$

in cui Φ_1 è permutabile colle funzioni precedenti.

Applicando alle Φ_1 la formula ora trovata per Ψ potremo scrivere

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \int_x^y F^2(x, \xi) \Phi_2(\xi, y) \, d\xi,$$

in cui c_2 è una quantità costante; così procedendo innanzi troveremo il

TEOREMA VI. — *Se la funzione* $\Psi(x, y)$ *è permutabile colla funzione di primo ordine* $F(x, y)$, *e queste funzioni hanno le derivate successive determinate e finite, sarà*

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \cdots + c_n F^n(x, y) + \\ + \int_x^y F^n(x, \xi)\, \Phi_n(\xi, y)\, d\xi ,$$

in cui le potenze denotano operazioni di composiziene, e la funzione Φ_n *è permutabile colle funzioni date.*

Se col crescere indefinito di n l'ultimo termine tenderà a zero, $\Psi(x, y)$ sarà rappresentata dalla serie

$$\sum_1^\infty {}_n c_n F^n(x, y).$$

13. La formula (B) dà le funzioni di secondo ordine e di ordine superiore al secondo permutabili con $F(x, y)$, quindi per ottenere tutte le funzioni permutabili con $F(x, y)$ basterà aggiungere alla espressione (B) $c_1 F(x, y)$ con c_1 costante arbitraria. Si può dunque fare a meno della risoluzione della (5) o della (6), come è indicato alla fine del § 2.

§ 4. — Funzioni permutabili coll'unità.

14. Riprendiamo le formule del § 1, supponendo $F(x, y) = F(y - x)$ e $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Avremo

$$f_2(x, y) = -f_1(x, y) = f(y - x)$$
$$g_{12}(x, y) = g_{21}(x, y) = -f'(y - x).$$

Applicando dunque la (8) del § 2, resulterà

$$\Psi_1 = 1 , \Psi_2 = 0 , \Psi_3 = 0 , \ldots \Psi_n = 0 , \ldots$$

e quindi

$$\Psi = \theta(y - x) \quad , \quad \Phi = \Phi(y - x).$$

Le considerazioni svolte nel § 1 mostrano che Φ dovrà avere la stessa forma anche se non si verificherà la condizione $F'(0) = 0$. Si ritrova così il gruppo di tutte le funzioni permutabili fra loro e con una costante, ossia permutabili coll'unità (1).

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 2.

15. Considereremo in questo § le funzioni di questo gruppo soltanto. Posto $y - x = u$, le funzioni stesse si scriveranno come funzioni di u e la composizione di due di esse Φ e Ψ ci darà

$$\Phi\Psi(u) = \int_0^u \Phi(u - v)\, \Psi(v)\, dv = \int_0^u \Phi(v)\, \Psi(u - v)\, dv .$$

Posto $\Phi(0) = c$, $\Psi(0) = c'$, avremo

$$\frac{d}{du}(\Phi\Psi(u)) = c\Psi(u) + \Psi\Phi'(u) = c'\Phi(u) + \Phi\Psi'(u),$$

da cui si ricava

$$\frac{d}{du}(\Phi^n(u)) = c\Phi^{n-1}(u) + \Phi^{n-1}\Phi'(u) = (c + \Phi')\,\Phi^{n-1}, \tag{15}$$

$$\frac{d^m}{du^m}(\Phi^n(u)) = (c + \Phi')^m\,\Phi^{n-m} \quad \text{per } n > m, \tag{15'}$$

$$\frac{d^n}{du^n}(\Phi^n(u)) = (c + \Phi')^n - c^n . \tag{15''}$$

16. Queste formule servono per risolvere immediatamente il problema seguente:

Data la funzione $F(u)$ *di ordine* n, *tale che*

$$F(0) = 0 \ , \ F'(0) = 0 , \ldots F^{(n-2)}(0) = 0 \ , \ F^{(n-1)}(0) = 1 ,$$

risolvere l'equazione integrale

$$\Phi^n(u) = F(u). \tag{16}$$

Osserviamo che

$$\lim_{u=0} \frac{F(u)}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}$$

e pel teorema V

$$\lim_{u=0} \frac{F(u)}{u^{n-1}} = \frac{c^n}{(n-1)!} ,$$

avendo posto $\Phi(0) = c$. Ne segue che c è una radice n^{esima} dell'unità. Prendiamo $c = 1$; le soluzioni che corrispondono agli altri valori di c si otterranno, come vedremo, immediatamente.

Deriviamo ora l'equazione (16) n volte rispetto ad u. In virtù della (15'') otterremo l'equazione integrale

$$(1 + \Phi')^n - 1 = f(u).$$

ove con $f(u)$ si è denotata la derivata n^{esima} di $F(u)$.

Per risolvere questa equazione integrale basterà applicare le regole generali che abbiamo date per la risoluzione delle equazioni integrali di grado n (1). Scriviamo perciò l'equazione algebrica

$$(1+z_2)^n - 1 = z_1 .$$

Avremo

$$z_2 = -1 + \sqrt[n]{1+z_1} .$$

Prendendo il radicale in modo che per $z_1 = 0$ sia $z_2 = 0$, e sviluppando in serie, si avrà

$$z_2 = \sum_1^\infty{}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-h+1\right)}{h!} z_1^h .$$

La funzione Φ' sarà quindi data dalla serie *convergente uniformemente*

$$\Phi'(u) = \sum_1^\infty{}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-h+1\right)}{h!} f^h(u),$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione. Ne segue la soluzione generale

$$\Phi(u) = \varepsilon\left(1 + \int_0^u \sum_1^\infty{}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-h+1\right)}{h!} f^h(v)\,dv\right),$$

ove ε rappresenta una radice n^{esima} qualunque dell'unità.

17. Se noi non poniamo la condizione che $\Phi(u)$ sia finita, l'equazione (16) può risolversi anche quando $F(u)$ sia di ordine inferiore ad n.

Per vederlo in un caso molto semplice consideriamo l'equazione integrale

$$\Phi^2(u) = F(u) \tag{17}$$

con $F(u)$ di primo ordine. Poniamo

$$F_1(u) = \int_0^u d\xi \int_0^{u-\xi} \frac{F(u-\xi-\eta)}{\xi^{\frac{1}{2}}\,\eta^{\frac{1}{2}}}\,d\eta .$$

$F_1(u)$ sarà di secondo grado. Risolviamo colla regola data nell'Art. precedente l'equazione integrale

$$\Phi_1^2(u) = F_1(u);$$

(1) Cfr. Nota prec. citata, § 4.

la soluzione della (17) sarà data dalla funzione

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\Phi_1(v)\,dv}{(u-v)^{\frac{1}{2}}},$$

la quale diviene infinita d'ordine $\frac{1}{2}$ per $u = 0$.

Meccanica — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido.* Nota V del Corrispondente E. Almansi.

1. In quest'ultima Nota esaminerò l'azione $A = \int_\sigma p\lambda d\sigma$, esercitata da una massa liquida sopra un corpo rigido S_0 in moto, nel caso particolare che il movimento del liquido sia continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S che esso occupa, e che inoltre il potenziale di velocità sia monodromo: il che può non accadere (pur essendo continue le sue derivate prime) se lo spazio S non è semplicemente connesso (1).

Il potenziale sarà in tal caso la funzione regolare ψ introdotta nella Nota precedente (§ 1). Ed avremo, attribuendo agli altri simboli i soliti significati:

$$p = -\varrho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + U\right) + \text{cost};$$

quindi:

$$A = -\varrho\int_\sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + U\right)\lambda\,d\sigma.$$

Io ho trasformato l'integrale

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda\,d\sigma$$

nell'ipotesi che, per qualunque posizione di S_0, sia $\lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma$, ove X, Y, Z denotano tre funzioni regolari di x, y, z, che soddisfano la equazione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

(1) Se però si suppone che nell'istante iniziale tutto il sistema sia in quiete, il potenziale di velocità risulta necessariamente monodromo; giacchè l'integrale di $udx + vdy + wdz$ esteso ad una linea chiusa *qualunque* (integrale che conserva, per un noto teorema, un valore costante), essendo nullo inizialmente, sarà sempre nullo.

ed ho stabilito la formula (IV, 3):

$$B_0 = -\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\lambda\, dx + \int_\sigma \theta N\, d\sigma\,,$$

ove

$$\theta = X\frac{\partial\psi}{\partial x} + Y\frac{\partial\psi}{\partial y} + Z\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,$$

ed N rappresenta la componente della velocità secondo la normale esterna rispetto a σ.

Sarà pertanto:

$$A = -\varrho\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma + \varrho\int_\sigma (\theta N - U\lambda)\, d\sigma;$$

o più semplicemente:

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + A_1\,, \tag{1}$$

essendo

$$\Phi = -\varrho\int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma\,,$$

$$A_1 = \varrho\int_\sigma (\theta N - U\lambda)\, d\sigma; \tag{2}$$

la quale espressione di A_1 poteva anche ottenersi, come caso particolare, dalla formula generale (15) della Nota precedente.

2. Consideriamo, per una superficie chiusa τ, che limiti una parte qualunque T dello spazio S occupato, in un determinato istante, dalla massa liquida, l'integrale

$$I = \int_\tau (\theta N - U\lambda)\, d\tau\,,$$

in cui s'intende che N e λ siano espressi in tutti i punti di τ (noi veniamo così ad estendere il significato di N e λ) dalle formule:

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma \quad , \quad \lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma\,,$$

$\alpha\,,\beta\,,\gamma$ denotando i coseni della normale a τ rivolta verso l'interno.

Dico che questo integrale, nei casi che a noi interessa considerare (per ciò che riguarda l'espressione di λ, ossia la natura delle funzioni X.Y,Z) è nullo.

Si ha infatti, per le formule precedenti:

$$I = \int_\tau \{(\theta u - UX)\,\alpha + (\theta v - UY)\,\beta + (\theta w - UZ)\gamma\}\, d\tau\,.$$

Possiamo trasformare I in un integrale esteso allo spazio T limitato da τ. Sotto il segno d'integrazione comparirà la funzione

$$F = \frac{\partial}{\partial x}(UX - \theta u) + \frac{\partial}{\partial y}(UY - \theta v) + \frac{\partial}{\partial z}(UZ - \theta w) .$$

Se teniamo presenti le equazioni

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

avremo:

$$(3) \qquad F = \left(X\frac{\partial U}{\partial x} + Y\frac{\partial U}{\partial y} + Z\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} + w\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) .$$

Ora, per essere $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, ecc., e $\theta = X\frac{\partial \psi}{\partial x} + Y\frac{\partial \psi}{\partial y} + Z\frac{\partial \psi}{\partial z}$, si ha:

$$(4) \qquad u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial z} =$$

$$= X\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\right) +$$

$$+ Y\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial z}\right) +$$

$$+ Z\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + G ,$$

ove

$$G = \frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

Ma essendo $U = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right\}$, i coefficienti di X, Y, Z, nella formula (4), non sono altro che $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Quindi dal confronto di questa formula colla (3) avremo:

$$F = -G .$$

D'altronde, nei casi che noi consideriamo ($\lambda = -\alpha$, $\lambda = -\gamma y + \beta z$, ecc.; ossia: $X = -1$, $Y = 0$, $Z = 0$; $X = 0$, $Y = z$, $Z = -y$, ecc.) le sei quantità $\frac{\partial X}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}, \ldots$, che figurano in G, sono nulle. Sarà perciò $G = 0$, $F = 0$, e finalmente $I = 0$; c. v. d.

3. Applichiamo la formula dimostrata all'insieme delle due superficie σ e σ' che limitano l'intero spazio S occupato dal liquido. Per ipotesi σ' rappresenta una superficie fissa: ivi sarà pertanto $N = 0$. E si avrà:

$$\int_{\sigma} (\theta N - U\lambda)\, d\sigma = -\int_{\sigma'} U\lambda\, d\sigma';$$

onde la formula (2) potrà anche scriversi:

$$A_1 = \varrho \int_{\sigma'} U\lambda\, d\sigma'.$$

Abbiamo così un'altra espressione, più semplice, del termine A_1.

4. Supponiamo che la superficie σ' sia lontanissima, con ogni suo punto, dal corpo S_0. La presenza di quella superficie avrà allora un'influenza trascurabile sul movimento del liquido in prossimità di S_0. E poichè i valori di ψ, e delle sue derivate, che figurano nella formula (1), sono presi nei punti di σ, noi potremo sostituire a ψ la funzione, che denoteremo colla stessa lettera, regolare ed armonica in *tutto* lo spazio esterno rispetto a σ, che sopra σ verifica l'equazione $\frac{\partial \psi}{\partial n} = N$, e all'infinito si annulla. Questa funzione può considerarsi come il potenziale di una massa (*nulla*, per essere $\int_{\sigma} N\, d\sigma = 0$) situata in S_0.

Diciamo Σ una superficie chiusa, che contenga nel suo interno σ: per esempio una sfera di raggio r, col centro in un punto fisso. In virtù della formula $I = 0$, sarà (definite, in tutto lo spazio esterno rispetto a σ, le funzioni u, v, w, come le derivate prime di ψ):

$$\int_{\sigma} (\theta N - U\lambda)\, d\sigma = -\int_{\Sigma} (\theta N - U\lambda)\, d\Sigma;$$

e perciò:

$$A_1 = -\varrho \int_{\Sigma} (\theta N - U\lambda)\, d\Sigma.$$

Facciamo crescere r oltre ogni limite; ed osserviamo che nei diversi casi ($X = -1, Y = 0, Z = 0$; $X = 0, Y = z, Z = -y$; ecc.), le funzioni X, Y, Z, che compariscono in λ e θ, diventano, al più, infinite, come r. Si riconosce allora che A_1, col crescere di r, tende a zero. Onde dovrà essere $A_1 = 0$; e per la formula (1):

$$A = \frac{d\Phi}{dt}.$$

5. Applicherò la formula precedente ad alcuni casi particolari di movimento (1).

Supponiamo che S_0 si sposti, con velocità costante a, parallelamente all'asse delle x, e insieme ruoti con velocità angolare, pure costante, ω, intorno allo stesso asse (moto elicoidale).

La componente normale della velocità, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, conserverà in ogni punto di σ un valore costante: lo stesso accadrà, per conseguenza, del potenziale ψ.

Se anche λ è tale da conservare in ogni punto di σ un valore costante, Φ non varierà col tempo, e la corrispondente azione A *sarà nulla.*

Ora, sopra σ si conserva costante il coseno α, come pure le quantità $\gamma y - \beta z$ (ossia il momento, rispetto all'asse delle x, del segmento di lunghezza 1 disteso sulla normale). Sarà nulla perciò la componente, secondo l'asse delle α, della forza F, risultante delle azioni elementari $p\,d\sigma$; e il loro momento rispetto al medesimo asse.

Se poi la velocità angolare ω è uguale a zero (moto traslatorio uniforme) si conserveranno costanti anche i coseni β e γ, quindi saranno pure nulle le altre due componenti di F; ossia: l'azione esercitata dal liquido si ridurrà ad una coppia tendente a far ruotare il corpo intorno ad un asse normale alla direzione del movimento.

6. Se il moto è traslatorio, ma la velocità a non è costante, denoteremo con $a\psi$, anzichè con ψ, il potenziale di velocità, e manterremo la formula $\Phi = -\varrho \int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma$; onde sarà:

$$A = \frac{d(a\Phi)}{dt}.$$

La funzione ψ conserva, nei punti di σ, un valore costante.

In quei casi in cui anche λ si conserva costante ($\lambda = -\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\gamma y + \beta z$), sarà $\Phi = \text{cost}$, quindi

$$A = \Phi \frac{da}{dt};$$

ossia: l'azione A risulterà proporzionale all'*accelerazione* del corpo.

7. Ritorniamo alla formula (1). La superficie fissa σ' che limita, con σ, lo spazio occupato dal liquido, sia formata di una parte piana σ'_1, e di una parte σ'_2, lontanissima, con ogni suo punto, dal corpo in moto: il quale, dunque, si muove in prossimità di una parete piana.

(1) I risultati a cui provengo sono già, in parte, noti: V. Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª.

Chiamando σ_1 l'intero piano a cui appartiene σ_1', noi potremo, commettendo un errore trascurabile, introdurre, nella formula (1), come funzione ψ, la funzione regolare e armonica in tutto lo spazio esterno rispetto a σ e σ_1, che sopra queste due superficie verifica rispettivamente le condizioni $\frac{\partial\psi}{\partial n} = N$, $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$, e all'infinito si annulla.

Consideriamo una sfera di raggio r, col centro in un punto del piano σ_1; che racchiuda il corpo S_0; e diciamo Σ la mezza sfera situata nello spazio S, Σ_1 l'area circolare che essa determina sul piano σ_1.

Per il teorema dimostrato nel § 2, noi potremo sostituire, nell'espressione (2) di A_1 all'integrale esteso a σ, la somma dei due integrali analoghi estesi a Σ e Σ_1, e cambiati di segno. Ma col crescere di r il primo integrale, come nel § 4, tende a zero [1]; il secondo ha per limite l'integrale esteso all'intero piano σ_1. D'altronde nei punti di σ_1 si ha $N = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$; onde sarà

$$A_1 = \varrho \int_{\sigma_1} U\lambda \, d\sigma_1 ,$$

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + \varrho \int_{\sigma_1} U\lambda \, d\sigma_1 .$$

Il corpo S_0 si muova di moto traslatorio uniforme, parallelamente al piano σ_1. Il potenziale ψ conserverà in ogni punto di σ un valore costante.

Assumeremo come asse delle x una retta normale al piano σ_1: il suo verso positivo coincida con quello della normale n a σ_1 (penetrante in S).

Esaminiamo la forza F che agisce sul corpo. Per calcolare le sue componenti F_x, F_y, F_z, dovremo fare λ uguale a $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Ora sopra σ i coseni α, β, γ si conservano costanti: e saranno perciò costanti le corrispondenti Φ. Sul piano σ_1 si ha $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, quindi rispettivamente $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, $\lambda = 0$. Avremo pertanto:

$$F_x = -\varrho \int_{\sigma_1} U \, d\sigma_1 , \tag{5}$$

$$F_y = F_z = 0 .$$

Se ne conclude (poichè il semi-quadrato U della velocità è una quantità sempre positiva o nulla [2]) che la forza agente sul corpo tende ad *avvicinarlo* al piano σ_1, a cui essa è normale.

[1] Riguardo al modo di comportarsi della funzione ψ all'infinito, si osserverà che, detta σ_0 la superficie simmetrica di σ rispetto al piano σ_1, la ψ potrà considerarsi come il potenziale di due masse (nulle) simmetricamente distribuite, rispetto a σ_1, negli spazii racchiusi da σ e σ_0.

[2] Da note proprietà delle funzioni armoniche segue che non può essere $\int_{\sigma_1} U \, d\sigma_1 = 0$, ossia $U = 0$ in tutti i punti di σ_1, se non quando l'intera massa liquida è in quiete.

8. Se il corpo ruota intorno ad un asse normale al piano σ_1, che assumeremo come asse delle x, si conserverà costante, in ogni punto di σ oltre al potenziale ψ, il coseno α, come pure il momento $\gamma y - \beta z$; onde la forza F_x sarà ancora espressa dalla formula (5), quindi diretta verso il piano σ_1. Essendo poi, su questo piano, $\gamma y - \beta z = 0$ $(\beta = \gamma = 0)$, il momento delle forze $p\,d\sigma$ rispetto all'asse di rotazione sarà nullo.

9. Notiamo, infine, che se si hanno due corpi uguali limitati dalle superficie σ, σ_0, i quali siano inizialmente, e si conservino, nel loro movimento, simmetrici rispetto ad un piano σ_1, e se la massa liquida occupa lo spazio esterno rispetto ai due corpi; l'azione esercitata sopra uno di essi sarà la stessa come se il piano σ_1 fosse una parete rigida. Se, per conseguenza i due corpi si muovono di moto traslatorio uniforme parallelamente al piano di simmetria, essi saranno attratti l'uno verso l'altro.

Lo stesso avverrà se essi ruotano, con velocità angolari uguali e costanti, intorno ad una retta normale a questo piano; a meno che non siano solidi di rotazione, aventi per asse quella retta: nel qual caso la massa liquida sta in quiete, e sopra i due corpi non viene esercitata alcuna azione.

Matematica. — *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

1. Ricordiamo il teorema di Osgood, relativo al problema più semplice di calcolo delle variazioni. Sia C una curva $y = \varphi(x)$ terminata a due punti A, B che rende minimo l'integrale $\int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$, dove a, b sono le ascisse di A, B. Ammesse soddisfatte certe ipotesi relative alla funzione f di x, y, y', per la cui precisa enunciazione rinvieremo ai trattati del Bolza [1] e dell'Hadamard [2], vale un teorema, dovuto a Osgood, e che noi enunceremo nella forma seguente:

Si può determinare un contorno R *di* C, *che soddisfa alla seguente condizione. Per ogni punto* P *di* R *non posto su* C, *esiste un numero positivo e non nullo* $\varepsilon > 0$, *tale che il valore del nostro integrale relativo a una qualsiasi curva* $y = y(x)$ *passante per* P *e terminata ai punti* A, B *supera il valore del nostro integrale relativo alla curva* C *di una quantità non minore di* ε.

Questo teorema non vale per i problemi di variazione relativi a integrali multipli: dal che segue una profonda differenza tra i problemi di variazione

[1] Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, pag. 280.
[2] *Leçons sur le calcul des variations*, p. 477 et suiv.

relativi agli integrali semplici e quelli relativi agli integrali multipli. Ciò non ostante l'esame di alcuni casi più semplici mi persuase che qualche teorema analogo si potesse dimostrare anche per gli integrali multipli; questa previsione trovò conferma nel teorema, a cui sono dedicate le pagine seguenti.

Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione di x, y, z, p, q finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il campo che considereremo. Se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a un *dato* contorno K, noi indicheremo con J(Σ) l'integrale $\iint_\sigma f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$, dove si è posto $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, e σ è l'area racchiusa sul piano xy dalla proiezione di K su tale piano.

Sia S un pezzo di superficie $z = \varphi(x, y)$ terminato a K, per cui J(S) ha il minimo valore; più precisamente esista un intorno R di S tale che, se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a K e posto in R, si abbia $J(\Sigma) \geq J(S)$.

Supporremo naturalmente soddisfatta in R la condizione di Jacobi: supporremo cioè l'esistenza di un campo di superficie *estremali* per il nostro problema di minimo, tale che per ogni punto di R passi una e una sola superficie estremale del campo considerato. La S faccia parte di questo campo; vale a dire quella delle estremali del nostro campo, che passa per un punto di S, coincida con S. Sia $\psi(x, y, z) = \text{cost}$ l'equazione delle nostre ∞^1 estremali; e sia $\psi(x, y, z) = 0$ l'equazione di S. Sarà identicamente

$$\psi(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \tag{1}$$

Siano $\pi, \varkappa$ le derivate di z rispetto a x ed y prese su una di queste superficie estremali. Sarà

$$\pi = -\frac{\psi'_x}{\psi'_z} \quad ; \quad \varkappa = -\frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \tag{2}$$

quando si supponga in R

$$\psi'(z) \neq 0,$$

ipotesi *quasi* equivalente all'altra che per ogni punto di R passi una e una sola estremale $\psi = \text{cost}$ (su cui la z è funzione delle x, y).

Supporremo soddisfatte le condizioni di Legendre e Weierstrass in una forma un po' più restrittiva di quella necessaria, affinchè la S renda proprio minimo il nostro integrale. Più precisamente supporremo che (impicciolendo caso mai l'intorno R), per tutti i valori di x, y, z in R e per valori qualsiasi delle p, q, si abbia

$$f''_{pp} > 0 \quad , \quad f''_{qq} > 0,$$

mentre le espressioni

$$f''_{qq} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{pp}} \geq h \quad \text{e} \quad f''_{pp} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{qq}} \geq k$$

hanno limiti inferiori h, k positivi e differenti da zero. Anzi ci basta supporre che queste condizioni siano soddisfatte per una opportuna scelta delle variabili indipendenti x, y. Se però supponessimo in più che $f''_{pp} f''_{qq} - f''^2_{pq}$ ha un limite inferiore diverso da zero, le condizioni da noi ammesse sarebbero invarianti rispetto a ogni cambiamento di variabili. Ma questa ulteriore limitazione ci è superflua.

Nelle nostre ipotesi, se Σ è un'altra superficie $z = z(x, y)$ terminata a K e posta in R, la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ si può rendere piccola a piacere, anche imponendo a Σ la condizione di passare per un punto A di R, non posto su S. Tanto basta per affermare che il teorema di Osgood non vale per gli integrali che stiamo esaminando. Un fatto analogo si presenta anche se a Σ imponessimo di passare per un numero finito di punti di R, non appartenenti a S. Ma, se invece imponessimo a Σ la condizione di contenere tutto un pezzetto di superficie assegnato e posto in R, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non potrebbe generalmente più essere ridotta piccola a piacere. Ma il teorema di Osgood, generalizzato in questo modo, diverrebbe affatto banale e di nessun interesse. Però queste osservazioni ci conducono a cercare di generalizzare il teorema di Osgood, indagando se esista qualche classe di gruppi G di punti tali che, se Σ è costretto a contenere i punti di un tale gruppo G, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non si possa più rendere piccola a piacere. Tali gruppi G dovranno, per così dire, essere intermedii tra i gruppi formati da un numero finito di punti, e i gruppi formati da un pezzetto si superficie. E, da questo punto di vista, l'idea prima che si presenta è quella di esaminare i gruppi G formati dai punti di un pezzetto di una curva. E noi dimostreremo appunto che il teorema di Osgood è generalizzabile in questo senso. Noi dimostreremo anzi un risultato più generale. Per ottenerlo osserviamo che, tanto un gruppo G_1 formato da un numero finito di punti, quanto un gruppo G formato coi punti di un pezzetto di curva, hanno per proiezione sul piano xy gruppi di punti a *misura superficiale* (area) nulla; però tra i gruppi G_1 e G vi è questa differenza essenziale: che, mentre la proiezione di G_1 ha, per così dire, *misura lineare* (lunghezza) nulla, il gruppo G *non è linearmente nullo*. Quest'ultima frase acquista un valore preciso con la seguente definizione:

Diremo che un gruppo G *di punti è linearmente nullo, se i piani* $x = \text{cost}$, *o* $y = \text{cost}$, *che contengono un punto di* G, *formano un gruppo di misura lineare nulla* (1).

(1) Questa definizione è simile, ma non del tutto identica, alla analoga definizione data dall'A. al § 2 (pag. 5) della Memoria: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza* ecc. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1907, tomo 23.

E noi dimostreremo (ammesse soddisfatte da f e da R le ipotesi sopra enunciate):

Se G *è un gruppo di punti non linearmente nullo, esiste una costante* ε *positiva diversa da zero, definita da* f, S *e dal gruppo* G, *tale che per ogni superficie* Σ, *definita da un'equazione* $z = z(x, y)$, *contenente i punti di* G [1], *è terminata al contorno* K *sia* $J(\Sigma) - J(S) \geq \varepsilon$.

Naturalmente supponiamo che, se $z = z(x, y)$ è l'equazione di Σ, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ siano finite e continue in σ; basterebbe del resto supporre che $\int \frac{\partial z}{\partial x} dx$ e $\int \frac{\partial z}{\partial y} dy$ esistessero, e differissero da z rispettivamente per una funzione della sola y, o della sola x.

Osserviamo che, se il nostro teorema non fosse vero, si potrebbe trovare una successione di superficie Σ_n, definite rispettivamente da un'equazione $z = \varphi_n(x, y)$, terminate a K. e contenenti tutti i punti di G, in guisa che

$$\lim_{n=\infty} [J(\Sigma_n) - J(S)] = 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{n=\infty} J(\Sigma_n) = J(S).$$

Poichè il limite per $n = \infty$ di $J(\Sigma_n)$ è il valore minimo J(S) le superficie $\Sigma_n (z = \varphi_n)$ costituirebbero *una successione minimizzante*. E ciononostante in ogni punto (x, y) del piano xy, proiezione di un punto di G, il valore di $\varphi_n(x, y)$ non varierebbe con n, e sarebbe distinto da $\varphi(x, y)$. Se dunque $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots$ è una *qualunque* successione subordinata alla successione delle φ_n. in tutti questi punti sarebbe $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n}(x, y) \neq \varphi(x, y)$. E questi punti formerebbero un aggregato *non linearmente nullo*.

Noi avremo dunque dimostrato il nostro teorema, se proveremo che nelle nostre ipotesi:

Se $z = \varphi_n(x, y)$ *è una successione minimizzante, si può scegliere una successione subordinata* $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \ldots$ *tale che* $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n} = \varphi$ *in tutti i punti di* σ, *escluso al più un aggregato di punti linearmente nullo.*

La funzione E di Weierstrass è data dalla

$$E = f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \pi, \varkappa) - (p - \pi) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \pi} - (q - \varkappa) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \varkappa}$$

che, per la formola di Taylor, si può scrivere:

$$E = \tfrac{1}{2} [R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2],$$

[1] Affinchè questo sia possibile, i punti di G devono avere le loro proiezioni sul piano xy, tutte interne a σ; e punti distinti di G devono avere proiezioni distinte. Questa ipotesi è fatta tacitamente in tutta la Nota.

dove R, S, T sono valori intermedii di f''_{pp}, f''_{pq}, f''_{qq}. Per le nostre ipotesi

$$R > 0\,,\ T > 0\,,\ R - \frac{S^2}{T} \geq k > 0\,,\ T - \frac{S^2}{R} \geq h > 0\,,$$

cosicchè

$$(R - k)\,T - S^2 \geq 0 \quad , \quad (T - h)\,R - S^2 \geq 0\,.$$

Dalle $R > 0$, $T > 0$ e da queste ultime disuguaglianze si deduce che le forme

$$(R - k)\,\xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2 \quad , \quad R\xi^2 + 2S\xi\eta + (T - h)\,\eta^2$$

nelle variabili ξ, η non hanno mai valori negativi, comunque si scelgano valori reali per le variabili ξ, η. Quindi:

$$2E = R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2 \geq k(p - \pi)^2$$
$$2E \geq h(q - \varkappa)^2\,;$$

donde, sommando e indicando con l la minima delle costanti $\frac{k}{4}$, $\frac{h}{4}$, si trae:

$$E \geq l\,\{(p - \pi)^2 + (q - \varkappa)^2\} \quad (l = \text{cost}\,;\ l > 0).$$

Ora $J(\Sigma_n) - J(S)$ è per i noti teoremi di Hilbert e Weierstrass eguale all'integrale di E relativo alla superficie Σ_n, vale a dire all'integrale di E esteso a σ ove si ponga $z = \varphi_n$, $p = p_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$, $q = q_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}$. Quindi per l'ultima disuguaglianza si avrà:

$$(3) \qquad J(\Sigma_n) - J(S) \geq l \iint_\sigma \{(p_n - \pi)^2 + (q_n - \varkappa)^2\}\,dx\,dy\,.$$

Posto

$$\psi Z_n = (x\,,\ y\,,\ \varphi_n)\ ,\ P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x}\ ,\ Q_n = \frac{\partial Z_n}{\partial y}\,,$$

sarà:

$$P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,p_n$$
$$(z = \varphi_n(x\,,\ y)\ ;\ \psi = \psi(x\,,\ y\,,\ z))$$

donde per le (2)

$$P_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\left[p_n - \left(\frac{-\psi'_x}{\psi'_z}\right)\right] = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(p_n - \pi) \qquad (z = \varphi_n)\,.$$

E similmente

$$Q_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(q_n - \varkappa) \qquad (z = \varphi_n)\,.$$

Se con M indichiamo il massimo in R della funzione continua $\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|$, sarà dunque

$$|p_n - \pi| \geq \left|\frac{P_n}{M}\right| \qquad |q_n - \varkappa| \geq \left|\frac{Q_n}{M}\right| .$$

E dalla (3) si trarrà:

$$J(\Sigma_n) - J(S) \geq \frac{l}{M} \iint_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma .$$

Poichè per le nostre ipotesi il primo membro di questa disuguaglianza ha per $n = \infty$ limite nullo, sarà *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty} \iint_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma = 0 .$$

Ora sul contorno K è $\varphi_n = \varphi$, poichè S e Σ_n passano tutte per K; sulla sua proiezione sul piano xy, ossia sul contorno di σ sarà dunque per (1)

$$Z_n = \psi(x, y, \varphi_n) = \psi(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{(sul contorno di } \sigma).$$

Le funzioni Z_n costituiscono dunque una *successione minimizzante* per il problema (di minimo) di trovare tra le funzioni nulle sul contorno di σ quella funzione Z (finita e continua insieme alle derivate prime), per cui l'integrale $\iint_\sigma (P^2 + Q^2)\, d\sigma \left(P = \frac{\partial Z}{\partial x}, Q = \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ ha il minimo valore. Questa funzione Z è chiaramente la funzione $Z = 0$; e per un teorema dato nella mia Memoria citata si potrà trovare nella successione delle Z_n una successione subordinata $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots$ tale che $\lim_{n=\infty} Z_{i_n} = 0$, escluso al più *un aggregato di punti linearmente nullo.* Escluso al più un tale aggregato, sarà dunque $\lim_{n=\infty} \psi(x, y, \varphi_{i_n}) = 0 = \psi(x, y, \varphi)$. Poichè la funzione $\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|$ è continua, e differente da zero, essa ha un minimo non nullo; la precedente uguaglianza dimostra (per il teorema della media) che sarà $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n} = \varphi$ in tutto σ, escluso al più un aggregato linearmente nullo (1) c. d. d.

Questi risultati com'è ben chiaro, fanno anche accrescere la speranza che il cosiddetto principio di minimo di Dirichlet possa ricevere nuove applicazioni, e diventare un ancòra più efficace strumento di ricerca.

(1) Infatti la nostra formola si può scrivere $\psi'_z[\varphi_{i_n} - \varphi] = 0$, dove ψ'_z indica un certo valore di $\frac{\partial \psi}{\partial z}$.

Matematica. — *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota del prof. M. Pannelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il Cremona nella seconda delle sue classiche Note: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (1), basandosi sulla considerazione del numero dei punti doppî delle curve del fascio, che sopra uno dei due piani dati corrisponde ad un fascio di rette dell'altro, ha dimostrato il seguente teorema:

« Se fra i punti di due piani ha luogo una corrispondenza birazionale « con soli punti fondamentali ordinarî, il numero di questi punti è lo stesso « per entrambi i piani ».

Ma di questa proprietà si può dare ancora un'altra dimostrazione.

Suppongasi di avere una rete qualunque di curve d'ordine n, dotata di σ punti-base ordinarî P_l, ciascuno multiplo secondo l. La sua Jacobiana è una curva dell'ordine $3(n-1)$, e possiede ogni punto P_l come punto multiplo ordinario secondo $3l-1$. Quindi il genere π di questa Jacobiana e quello p di una curva della rete, sono dati rispettivamente dalle formule:

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2\pi &= (3n-4)(3n-5) - \sum_l (3l-1)(3l-2) \\ 2p &= (n-1)(n-2) - \sum_l l(l-1) \end{aligned}$$

dalle quali segue subito:

« Il genere π della Jacobiana di una rete qualunque di curve di ge- « nere p, dotata di σ punti fondamentali ordinari, è somministrato dalla « espressione:

$$\pi = 9p - \sigma + 1 \text{ »}.$$

In particolare, se la rete data è omaloidica, si ha $p = 0$, e quindi in virtù del teorema precedente, applicabile *in ogni caso*, quando come genere della Jacobiana s'intenda *sempre* il numero calcolato per mezzo della formula (1), si trova:

$$(2) \qquad \pi = 1 - \sigma.$$

D'altra parte la data rete omaloidica definisce una corrispondenza birazionale fra i punti del piano in cui essa giace e quelli di un altro piano,

(1) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, t. V, ser. 2ª.

e se si indica con σ' il numero dei punti fondamentali di quest'ultimo piano, la Jacobiana della rete si compone (1) di σ' curve razionali, due qualunque delle quali non s'intersecano fuori dei punti fondamentali. Quindi il genere π di questa Jacobiana può determinarsi ancora, applicando la formula con cui si calcola il genere di una curva composta, genere di cui la definizione è in accordo con quella dianzi data in ogni caso per la Jacobiana stessa. In tal modo si ottiene:

$$\pi = 1 - \sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (2) segue il teorema del Cremona, sopra ricordato.

2. Se le considerazioni precedenti si ripetono per lo spazio ordinario, si giunge a stabilire una relazione notevole fra gli elementi fondamentali di due spazî, i cui punti siano legati fra loro da una corrispondenza birazionale.

La dimostrazione di questa relazione costituisce l'oggetto della presente Nota.

Suppongasi di avere un sistema lineare triplamente infinito di superficie S d'ordine n, di cui la base sia formata da σ punti P_l e da τ curve C_i. Ogni punto P_l sia multiplo (ordinario) secondo l per ciascuna superficie S, e il cono in esso tangente alla superficie medesima vari col variare di questa nel sistema dato. Inoltre ogni curva C_i, d'ordine m_i e di rango r_i, sia multipla (ordinaria) secondo i per ciascuna superficie S, e gli i piani tangenti in uno stesso punto di C_i alla superficie medesima varino tutti col variare di questa nel sistema dato. Infine ogni curva C_i si appoggi ad ogni altra curva $C_j (j \geq i)$ in k_{ij} punti e passi per ogni punto P_l con j_{il} rami.

La Jacobiana del sistema dato è una superficie dell'ordine $4(n-1)$ e possiede ogni punto P_l come punto multiplo secondo $4l-2$ ed ogni curva C_i come curva multipla secondo $4i-1$.

Il genere aritmetico Π di questa superficie, quello P di una superficie S del sistema, l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie medesima e il genere p della curva d'intersezione, fuori delle curve fondamentali, di due superficie S, sono rispettivamente date dalle formule:

$$\begin{aligned}
6\Pi = {} & 64n^3 - 288n^2 + 428n - 210 - \sum_l (64l^3 - 144l^2 + 104l - 24) \\
& - \sum_i [(192i^2 - 144i + 24)n - (128i^3 + 144i^2 - 164i + 30)] m_i \\
& + \sum_i (64i^3 - 72i^2 + 26i - 3) r_i \\
& + \sum_{ij} [(192i^2 - 144i + 24)j - (64i^3 - 28i + 6)] k_{ij} \\
& + \sum_{il} [(192i^2 - 144i + 24)l - (128i^3 - 56i + 12)] j_{il}
\end{aligned}$$

(1) Cremona, loc. cit, nn. 6 ed 11.

$$6P = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 - \sum_i (l^3 - 3l^2 + 2l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 3i)\, n - (2i^3 + 3i^2 - 5i)]\, m_i + \tfrac{1}{2} \sum_i (2i^3 - 3i^2 + i)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 3i)\, j - (i^3 - i)]\, k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - 3i)\, l - (2i^3 - 2i)]\, j_{il}$$

$$\Omega = n^3 - 8n^2 + 16n + 1 - \sum_i (l^3 - 4l^2 + 4l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 4i + 1)\, n - (2i^3 + 4i^2 - 6i)]\, m_i + \sum_i (i^3 - 2i^2 + i)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 4i + 1)\, j - (i^3 - i)]\, k_{ij}$$
$$+ \sum_{il} [(3i^2 - 4i + 1)\, l - (2i^3 - 2i)]\, j_{il}$$

$$p = n^3 - 2n^2 + 1 - \sum_i (l^3 - l^2)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - i)\, n - (2i^3 + i^2)]\, m_i + \tfrac{1}{2} \sum_i (2i^3 - i^2)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - i)\, j - i^3]\, k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - i)\, l - 2i^3]\, j_{il}.$$

Dalle formule precedenti segue facilmente l'altra:

$$(3) \qquad \Pi = 4P + 4\Omega + 6p + 4\sigma + 5\mu - \tfrac{1}{2} \sum_i r_i - \sum_{ij} k_{ij} - 2\lambda - 4I$$

nella quale si è posto:

$$\mu = \sum_i m_i \qquad \lambda = \sum_{il} j_{il}.$$

Ora il genere ϱ_i di una curva C_i è dato dalla formula:

$$\varrho_i = \tfrac{1}{2} r_i - m_i + 1,$$

da cui, posto ancora:

$$(4) \qquad \varrho = \sum_i \varrho_i + \sum_{ij} k_{ij} - \tau + 1$$

segue:

$$\mu - \tfrac{1}{2} \sum_i r_i - \sum_{ij} k_{ij} = -\varrho + 1.$$

In virtù di questa eguaglianza dalla (3) si deduce:

« Il genere aritmetico Π della Jacobiana di un sistema lineare triplamente infinito di superficie S è dato dalla formula:

$$\Pi = 4P + 4\Omega + 6\varrho + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda - 4\Theta$$

« dove P, Ω, p, σ, μ, ϱ e λ hanno i significati dianzi stabiliti ».

3. In particolare, suppongasi che il sistema dato sia omaloidico. In tal caso si ha intanto: $P = 0$ e $p = 0$. Inoltre il sistema stesso definisce una corrispondenza birazionale fra i punti dello spazio $\sum$ cui esso appartiene e quelli di un altro spazio $\sum'$. Quindi se si indica con μ' la somma degli ordini di tutte le curve fondamentali di $\sum'$, una superficie S corrispondendo ad un piano di $\sum'$, contiene μ' curve eccezionali, epperò l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è dato dalla formula:

$$\Omega = 10 - \mu'. \tag{5}$$

Ciò nell'ipotesi, tacitamente ammessa anche nel numero precedente, in cui lo spazio $\sum$ non contenga punti fondamentali semplici per le superficie S, poichè per ognuno di questi punti l'invariante Ω aumenta di una unità.

In questa ipotesi dal teorema del num. prec. si deduce intanto:

$$\Pi = -4\mu' + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda. \tag{5'}$$

D'altra parte la Jacobiana del sistema dato si compone delle τ' superficie $R_{i'}$ e delle σ' superficie $T_{l'}$ di $\sum$ corrispondenti alle τ' curve fondamentali $C'_{i'}$ ed ai σ' punti fondamentali $P'_{l'}$ di $\sum'$, ogni superficie $T_{l'}$ dovendo essere contata *due* volte [1] se, come qui si suppone, il sistema omaloidico di $\sum'$ soddisfa alle medesime condizioni imposte al sistema di superficie S considerato nel n. 2. Quindi il genere aritmetico Π può essere determinato ancora applicando alla superficie $\sum_{i'} R_{i'} + \sum_{l'} 2T_{l'}$, la formula con cui si calcola il genere aritmetico di una superficie composta. In tal modo e riguardando momentaneamente la superficie composta $\sum R_{i'}$ come una superficie unica, R, si trova:

$$\begin{aligned}\Pi = {} & g.a.R + 2\sum_{l'} g(RT_{l'}) + \sum_{l'} g(T_{l'}\,T_{l'}) + 4\sum_{l'k'} g(T_{l'}\,T_{k'}) \\ & + \sum_{l'}(RT_{l'}\,T_{l'}) + \sum_{l'k'}(RT_{l'}\,T_{k'}) + \sum_{l'k'}(T_{l'}T_{l'}T_{k'}) - \binom{2\sigma'}{2},\end{aligned} \tag{6}$$

dove $g.a.R$ indica il genere aritmetico della superficie R, i simboli $g(AB)$ ed (ABC) denotano rispettivamente il genere della curva e il numero dei punti d'intersezione, fuori degli elementi fondamentali, di due superficie A e B o di tre superficie A, B, C, e l'indice k', deve, come l', variare da 1 sino a σ', ma in ciascuno dei simboli $(T_{l'}\,T_{k'})$, $(RT_{l'}\,T_{k'})$, $(T_{l'}\,T_{l'}\,T_{k'})$ non può assumere il medesimo valore di l'.

a) In virtù dello stesso teorema sul genere aritmetico di una superficie composta, testè applicato, si ha:

$$g.a.R = g.a.\sum R_{i'} = \sum g.a.R_{i'} + \sum g(R_{i'}\,R_{j'}) + \sum(R_{i'}\,R_{j'}\,R_{k'}) - \binom{\tau'-1}{2} \tag{7}$$

[1] Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, § IV. Annali di Matematica, ser. II, t. V.

dove ciascuno degli indici i', j', h' deve variare da uno sino a τ'; ma quelli che si trovano nello stesso simbolo $(R_{i'} R_{j'})$ e $(R_{i'} R_{j'} R_{k'})$ debbono assumere valori differenti.

Una superficie $R_{i'}$ contiene un fascio costituito dalle curve (razionali) corrispondenti ai punti della curva $C'_{i'}$; quindi, dette $\varrho'_{i'}$ il genere di questa curva, il genere aritmetico della superficie $R_{i'}$ è $-\varrho'_{i'}$.

Se una curva $C'_{i'}$ si appoggia ad ogni altra curva $C'_{j'}$ $(j' \geq i')$ in $k'_{i'j'}$ punti, le due superficie $R_{i'}$ e $R_{j'}$ hanno in comune, fuori delle fondamentali, $k'_{i'j'}$ curve razionali, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il genere della curva $(R_{i'} R_{j'})$ è $-k'_{i'j'} + 1$, epperò si ha:

$$(8) \qquad \sum g(R_{i'} R_{j'}) = -\sum k'_{i'j'} + \binom{\tau'}{2}.$$

Infine tre superficie $R_{i'}, R_{j'}, R_{h'}$ non hanno punti comuni, fuori degli elementi fondamentali; quindi è:

$$\sum (R_{i'} R_{j'} R_{h'}) = 0.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formula (7); così posto:

$$\varrho' = \sum \varrho'_{i'} + \sum k'_{i'j'} - \tau' + 1$$

si trova:

$$g.a.R = -\varrho'.$$

b) Se ogni curva $C'_{i'}$ passa con $j'_{i'l'}$ rami per ogni punto $P'_{l'}$, e se si indica con λ' la somma $\sum_{i'l'} j'_{i'l'}$, come la formula (8), così si ottiene la seguente:

$$\sum g(RT_{l'}) = -\lambda' + \sigma'.$$

c) Due superficie $T_{l'}$ e $T_{k'}$ non si tagliano fuori delle curve fondamentali; mentre una superficie $R_{i'}$ e una superficie $T_{l'}$ s'incontrano in $j'_{i'l'}$ curve razionali due qualunque delle quali non s'incontrano, fuori dei punti P_l, e il grado di intersezione con se stessa di ciascuna di esse, considerata sulla superficie $R_{i'}$, è zero. Si ha pertanto:

$$\sum (RT_{l'} T_{l'}) = 0 \ , \ \sum (RT_{l'} T_{k'}) = 0 \ , \ \sum (T_{l'} T_{l'} T_{k'}) = 0.$$

d) Infine è da porre [1]:

$$g(T_{l'} T_{l'}) = 3 \ , \ g(T_{l'} T_{k'}) = 1$$

[1] Il valore 3, che deve essere attribuito al simbolo $g(AB)$, quando le due superficie A e B coincidono entrambe con la superficie $T_{l'}$, risulta dal confronto della formula che dà il genere aritmetico di una superficie, che sia somma di altre superficie *tutte* distinte fra loro, con quella che somministra il genere aritmetico della superficie stessa,

donde segue:

$$\sum_{l'} g(T_{l'} T_{l'}) = 3\sigma' \ , \ \sum g(T_{l'} T_{k'}) = \binom{\sigma'}{2} .$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini del secondo membro della (6); quindi sostituendo, si trova:

$$\Pi = -\varrho' - 2\lambda' + 4\sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (5′) si deduce:

« Se fra i punti di due spazi $\sum$ e $\sum'$ ha luogo una corrispondenza bi-
« razionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle condizioni imposte ad
« essi nel n. 2, fra gli elementi stessi ha luogo la relazione seguente:

$$4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda = 4\sigma' + 4\mu' - \varrho' - 2\lambda'$$

« dove σ è il numero dei punti e μ l'ordine della curva composta da tutte
« le curve, che insieme con quei punti costituiscono gli elementi fondamen-
« tali di $\sum$, λ il numero totale dei rami di queste curve che passano per
« quei punti ed infine ϱ è definito dalla formula (4). I simboli $\sigma', \mu', \lambda', \varrho'$
« hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di $\sum'$ ».

Nel dimostrare questo teorema si è supposto che lo spazio $\sum$ non contenesse punti fondamentali semplici. Si toglie facilmente siffatta restrizione osservando: 1°) Un punto semplice, come tale, non può avere alcuna influenza sul valore dell'invariante Ω, e quindi nella formula data nel n. 2 con la quale si calcola l'invariante stesso, la somma $\sum$ non deve essere estesa ai punti fondamentali semplici, epperò il numero s di questi punti non è compreso in quello σ dei punti fondamentali multipli che figura nella formula (3). 2°) L'invariante Ω aumenta di una unità per ogni punto della superficie, che si trasforma in una curva eccezionale, epperò in luogo della formula (5) si ha l'altra:

$$\Omega = 10 - \mu' + s .$$

4. Come il teorema del Cremona, ricordato in principio, si estende alle superficie [1], così il teorema testè dimostrato si può estendere alle varietà

---

nell'ipotesi in cui *due* delle sue componenti coincidano fra loro, come dimostrerò in un'altra Nota non potendolo far qui, per ristrettezza di spazio.

In modo analogo si determina il valore 1 da attribuirsi al simbolo $g(AB)$, quando le due superficie A e B coincidono rispettivamente con le superficie $T_{l'}$ e $T_{k'}$, le quali non s'intersecano fuori degli elementi fondamentali.

[1] Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, n. 7, Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI (1896).

a tre dimensioni. Su questa estensione, che è implicitamente contenuta in una mia precedente Nota (1), e su qualche altra relazione che oltre a quella qui stabilita, probabilmente esiste fra gli elementi fondamentali di una trasformazione birazionale, spero di poter ritornare in seguito.

Matematica. — *Sopra una proprietà dei polinomi sferici.* Nota del prof. Carlo Alberto Dell'Agnola, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Fra i polinomi di grado n della forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

Tchebychef ha determinato quello per il quale il massimo dei valori assoluti nell'intervallo $(-1, +1)$ è minimo: posto $x = \cos\varphi$, esso è dato dall'espressione

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n\varphi) \quad (2). \tag{2}$$

È noto però che nelle pratiche applicazioni interessa il più sovente aver riguardo ai valori medî; quindi, in particolare, quel che occorre di rendere il più possibile prossimo a zero non è la deviazione locale, ma bensì il cosiddetto *valore efficace* (radice quadrata della media dei quadrati), vale a dire l'espressione

$$v_n = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n^2\, dx}\,. \tag{3}$$

La questione, implicitamente contenuta in un'altra più generale pure studiata da Tchebychef (3), si può risolvere con mezzi elementari, perchè, come si vede subito, si tratta di un ordinario problema di minimo, risguardando come variabili indipendenti i coefficienti del polinomio P_n che si vuol determinare. Ma è anche più semplice ed elegante risolvere indirettamente la questione, riattaccandola a classiche proprietà dei polinomi sferici. A ciò è dedicata la presente Nota, nella quale si mettono a confronto le deviazioni

(1) *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Redic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XV (1906).

(2) Tchebychef, *Oeuvres*, t. I. pag. 299, St. Petersbourg, 1907. Il Liebmann, seguendo un procedimento elementare, arriva ad una dimostrazione molto semplice della stessa proprietà; H. Liebmann, *Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tchebychef*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, XVIII, 1909, Heft 9/10, pp. 433-437.

(3) Tchebychef, *Oeuvres*, t. II, pp. 377-402.

locali e i valori efficaci che spettano rispettivamente ai polinomi P_n e T_n, dando un criterio numerico per apprezzare, al variare del grado n, i vantaggi degli uni in confronto degli altri, a seconda del punto di vista adottato. Ho potuto così mettere in luce un'importante proprietà dei polinomi di Tchebychef, vale a dire che sebbene essi non facciano discendere il valore efficace proprio al minimo, non lo superano per più del 15 %, il valore relativo dell'eccesso convergendo assintoticamente verso $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$ (13 % circa), al crescere indefinito di n. Invece per i polinomi P_n la massima deviazione locale pur decrescendo rapidamente al crescere di n, supera di molto il minimo di Tchebychef, il relativo rapporto essendo dell'ordine di $\sqrt{n}$.

1. Indichiamo con X_n il polinomio sferico di grado n: esso è dato dalla formola

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}. \tag{4}$$

I polinomi sferici godono, come è noto, delle seguenti proprietà:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0, \quad (m \gtrless n), \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{6}$$

Oltre a ciò, se Q è un polinomio qualunque di grado inferiore ad n, abbiamo dalla (5), oppure mediante integrazione per parti,

$$\int_{-1}^{+1} Q X_n \, dx = 0. \tag{7}$$

I polinomi

$$P_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot X_n \tag{8}$$

godono essi pure, come è chiaro, della proprietà (5) e quindi anche della (7).

Dalla (4) risulta tosto che P_n è della forma (1) ed è facile riconoscere che fra i polinomi di grado n di questa forma, è desso precisamente quello che rende minima l'espressione (3).

Indichiamo con f_n un polinomio *qualunque* della forma (1): basterà evidentemente dimostrare che

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2) \, dx$$

è positivo o nullo. A tal uopo si osservi che f_n si può sempre considerare come una combinazione lineare dei polinomi P_n; possiamo porre cioè

$$f_n = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1} + P_n,$$

o, più brevemente,

$$f_n = Q_{n-1} + P_n, \tag{9}$$

ove $Q_{n-1} = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1}$ è un polinomio di grado $n-1$ al più. Dalla (9) abbiamo

$$f_n^2 - P_n^2 = Q_{n-1}^2 + 2 Q_{n-1} P_n$$

e quindi

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2)\, dx = \int_{-1}^{+1} Q_{n-1}^2\, dx + 2 \int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx .$$

Il primo integrale del secondo membro, ove non sia nullo, è essenzialmente positivo: mentre, per le suaccennate proprietà dei polinomi P_n,

$$\int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx = 0 .$$

Dalle (6) e (8) segue immediatamente

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2\, dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{\{(2n)!\}^2 \cdot (2n+1)}$$

e si ha quindi, pel minimo cercato, l'espressione:

$$v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} . \tag{10}$$

2. Il valore efficace w_n, relativo all'intervallo $(-1, +1)$, che compete al polinomio T_n di Tchebychef, è dato, per definizione, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T_n^2\, dx ,$$

ovvero, avuto riguardo alla (2) e posto $x = \cos\varphi$, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2(n\varphi) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi .$$

Un calcolo molto semplice conduce alla formola

$$w_n^2 = \frac{2n^2 - 1}{2^{2n-2} \cdot (4n^2 - 1)} .$$

Determiniamo l'espressione del rapporto $r_n = \frac{w_n}{v_n}$. Dalla precedente e dalla (10) si ha

$$(11) \qquad r_n = 2\sqrt{\frac{2n^2-1}{2n-1}} \cdot \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2},$$

e, in particolare,

$$(12) \qquad r_1 = 1 \ , \ r_2 = \frac{\sqrt{21}}{4} \ , \ r_3 = \frac{\sqrt{85}}{8},$$

dalle quali risulta che

$$r_1 < r_2 < r_3 .$$

Si riconosce poi facilmente che $r_{n+1} < r_n$ per $n \geq 3$, e quindi che r_n decresce sempre al crescere indefinito di n a partire da r_3.

È noto d'altronde [1] che

$$(13) \qquad \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi n} \cdot e^{\frac{4\vartheta - \vartheta'}{24n}},$$

ove ϑ e ϑ' sono numeri positivi minori dell'unità: per cui la (11) si può mettere sotto la forma:

$$r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2n^2-1}{2n^2-n}} \cdot e^{\frac{\vartheta' - 4\vartheta}{24n}}.$$

Questa ci dice che $\lim_{n=\infty} r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ e quindi che

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{w_n - v_n}{v_n} = \lim_{n=\infty} (r_n - 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1 .$$

Se dunque nel calcolo del valore efficace si sostituisce a P_n il polinomio di Tchebychef, l'errore relativo, $r_n - 1$, diminuisce sempre, a misura che n aumenta, a partire da $n = 3$, tendendo al limite $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$. Da ciò e dalle (12) si può concludere che detto errore non può mai superare $\frac{\sqrt{85}}{8} - 1$, (15 % circa).

3. Indichiamo con d_n la deviazione locale di P_n e con t_n quella di T_n, nell'intervallo $(-1 \ , \ +1)$. Dalle (2) e (8), tenendo presente che il massimo di X_n nell'intervallo $(-1 \ , \ +1)$ è l'unità, si ha:

$$(14) \qquad t_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ , \ d_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!},$$

[1] E. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 480.

entrambe infinitesime al crescere indefinito di n. Notiamo subito che $d_1 = t_1$, e che per $n > 1$, $d_n > t_n$.

Per confrontare le due deviazioni consideriamo il loro rapporto $\varrho_n = \frac{d_n}{t_n}$. Dalla (14) abbiamo

$$\varrho_n = \frac{1}{2} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} .$$

Da questa e dalla (13) si vede che il valore assintotico di ϱ_n è

$$\varrho_n = \sqrt{\frac{\pi n}{4}} \cdot e^{\frac{4\vartheta - \vartheta'}{24n}},$$

e quindi che il rapporto ϱ_n cresce indefinitamente con n ed è dell'ordine di $\sqrt{n}$.

Fisica terrestre. — *Le anomalie costiere di gravità e la teoria elastica dell'isostasi.* Nota di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

È noto che la distribuzione della gravità ridotta al mare, mentre manifesta una generale compensazione fra le attrazioni delle masse superficiali e quelle delle masse profonde ad esse sottostanti, rivela tuttavia, fra altre irregolarità, una anomalia costante lungo le coste dei mari profondi (1). Procedendo dall'interno del continente verso la costa la gravità cresce, raggiunge un massimo non lungi dalla costa, diminuisce rapidamente fino a un minimo, situato in mare non molto lontano dalla terra, per risalire poi lentamente verso l'alto mare fino a raggiungere al largo sull'oceano il suo valore normale.

Recentemente il prof. Helmert prese a fondamento questo fatto per un calcolo approssimato della *profondità di compensazione* (2), cioè della profondità di una superficie sferica che sarebbe premuta uniformemente dal peso della costa sovraincombente, secondo la teoria di Pratt, e trovò un valore che corrisponde assai esattamente a quello che Tittmann ed Hayford avevano dedotto, per via affatto diversa, dalle deviazioni del filo a piombo

(1) Un'esposizione chiara dei problemi che ad essi si collegano è data dall'ingegnere O. Zanotti Bianco, *La gravità alla superficie del mare e l'ipotesi di Pratt secondo alcuni lavori recenti*, fasc. I-II, gennaio-febbraio 1910, della Rivista geografica italiana.

(2) Helmert F. R., *Die Tiefe der Ausgleichfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten*, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 25 nov. 1909.

negli Stati Uniti del Nord. Questo notevole risultato è giustamente considerato come un nuovo argomento in favore della teoria isostatica.

D'altro lato l'ipotesi colla quale Pratt giustifica l'isostasi, ammettendo che tutti i movimenti che determinarono le irregolarità della superficie terrestre si sarebbero compiuti secondo la verticale, senza spostamenti laterali, è in aperta contradizione coi dati della Geologia che, specialmente nella teoria ora dominante delle *nappes de recouvrement*, constaterebbe l'esistenza di immensi scorrimenti orizzontali.

Avendo recentemente [1] tentato di spiegare le dislocazioni tectoniche con spostamenti elastici e avendo in tale occasione dimostrato che tali spostamenti possono dar ragione dell'isostasi [2], mi parve interessante ricercare se anche le anomalie costiere possano riannodarsi alla stessa teoria. È un tentativo puramente teorico, che non ammette valutazioni quantitative, ma che pur non mi sembra privo di interesse, in quanto dimostra la *possibilità* di conciliare i fatti scoperti dai geodeti con quelli scoperti dai geologi. Credo opportuno ripetere qui che a risultati non essenzialmente diversi si arriverebbe nell'ipotesi di lentissimi moti vischiosi, che sembrano meglio rispondenti alla costituzione reale del nostro globo.

Considero ancora il caso di un suolo elastico piano, che viene deformato per il trasporto di masse materiali da una zona ad un'altra, che supporremo rettilinee e parallele. Assumiamo il piano come piano xy, essendo l'asse delle z verticale e diretto verso il basso, cioè nell'interno della massa, e l'asse delle y nella direzione delle due zone.

Sia Θ la dilatazione elastica determinata dalla deformazione in un punto qualunque della massa, di coordinate $\xi\,\eta\,\zeta$. Indicando con ϱ la densità, la variazione di massa in quel punto è $-\varrho\Theta$, e il potenziale che essa induce in un punto fisso O, di coordinate $x\,y\,z$ è $-\frac{\varrho\Theta}{r}$, ove r è la distanza dei due punti. Considerando la massa come omogenea, il potenziale totale indotto nel punto O da tutte le variazioni di densità che si verificano nella massa è

$$V = -\varrho \int \frac{\Theta\, dS}{r}$$

e la componente verticale dell'anomalia gravimetrica sarà (f costante di attrazione)

$$\Delta_1 g = f\frac{\partial V}{\partial z} = f\varrho \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dS\,. \tag{1}$$

[1] De Marchi, *Teoria elastica delle dislocazioni terrestri*, in Rend. Accad. Lincei, Roma, 1907, vol. XVI, serie 5ª, pp. 384 e seg.

[2] Id., *La teoria elastica dell'isostasi terrestre*, id., pp. 970 e seg.

Indicando con u, v, w le componenti dello spostamento elastico, si può scrivere, secondo le formole generali dell'elasticità [1], pel caso dell'assenza di forze di massa

$$4\pi B w = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{2}$$

ove B è la seconda costante di isotropia, e

$$\Phi = (A - B)\int \frac{\Theta dS}{r} + B\int \left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r}, \tag{3}$$

$$W = \int \frac{N ds}{r} + B\int \left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{d\xi} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)\frac{d\zeta}{dn}\,ds + B\int w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,ds; \tag{4}$$

essendo A l'altra costante di isotropia, N la componente secondo l'asse delle z della forza superficiale deformante, ed essendo il primo integrale della (3) esteso a tutto il volume e tutti gli altri a tutta la superficie del corpo, la cui normale positiva n si intende diretta verso l'interno della massa.

Dalla prima delle (3) e dalla (1) si ricava

$$(A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - B\int \left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,ds,$$

e per la (2),

$$(A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = W - 4\pi B w - B\int \left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,ds.$$

Nel caso nostro è u funzione della sola ξ, $v = 0$ e inoltre

$$\frac{d\xi}{dn} = 0 \quad \frac{d\zeta}{dn} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{d}{dn}$$

e quindi

$$(A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = \int \frac{N ds}{r} - 4\pi B w + B\int u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,ds + B\int w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,ds. \tag{5}$$

Le formole (2-4) sono valide per tutti i punti $x\,y\,z$ interni alla massa; volendo quindi il valore di Δg in un punto vicino quanto si vuole alla superficie dovremo far tendere a zero la z dai valori positivi. Osserviamo che l'ultimo termine della (5) è un potenziale di doppio strato che per

[1] Cesàro E. *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Torino, 1894, pag. 105.

$z = 0$ è identicamente nullo, mentre al passaggio dai valori positivi della z ai valori superficiali presenta un salto di $-2\pi w$. Per valori positivi, ma piccoli quanto si vuole, di z esso ha quindi il valore $2\pi w$. Indicando, come nella seconda delle Memorie citate, il primo integrale con ψ, ricordiamo (1) che

$$w = \frac{A}{4\pi B(A-B)}\psi - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

e quindi per z piccola quanto si vuole

$$\psi = \frac{4\pi B(A-B)}{A}w, \tag{6}$$

Sostituendo questi valori nella (5) abbiamo finalmente

$$(A-B)\frac{1}{\varrho f}\Delta g = 2\pi\frac{B}{A}(A-2B)w + B\int u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds. \tag{7}$$

Nell'ultimo integrale u è funzione della sola ξ; ponendo quindi $ds = d\xi\, d\eta$ esso sarà

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta.$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta = (x-\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{r^3}.$$

Ponendo

$$z^2 + (x-\xi)^2 = q^2$$

si può scrivere

$$\frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{q^2 r}\right)$$

epperò, essendo r sempre positivo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta = \left[\frac{1}{q^2}\frac{\eta-y}{|\eta-y|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{(\eta-y)^2}}}\right]_{\eta=-\infty}^{\eta=\infty}(x-\xi) = \frac{2}{q^2}(x-\xi).$$

L'ultimo termine della (7) equivale quindi a

$$\lim_{z=0}\left[2B\int_{-\infty}^{\infty}u\frac{x-\xi}{q^2}d\xi\right].$$

(1) *Teoria elastica* ecc., formola (3).

Dalla prima delle mie due Memorie citate (1) appare che nel caso che le forze superficiali deformatrici siano limitate a due strisce parallele di larghezza piccolissima, lo spostamento orizzontale u è diverso da zero, e costante, nella zona compresa fra le due striscie, mentre è nulla al di là di queste. Quest'ultima condizione è, per il principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti, verificata anche nel caso di una distribuzione continua di forze deformatrici N entro una zona limitata, colla sola condizione che esse siano tutte posirive da un lato e tutte negative dall'altro lato dell'asse delle y, assumendo come tale la retta ove $N = 0$. Questo caso risponde alle condizioni di una zona costiera, alleggerita in terra dalla degradazione e aggravata in mare dall'accumulazione (2).

Anche in tal caso si ha in superficie uno spostamento orizzontale dalla zona alleggerita alla zona premuta, mentre oltre i limiti di esse la u è nulla. L'integrale precedente deve quindi limitarsi ai valori della ξ compresi entro queste due zone, e la u in questo intervallo è variabile, ma ha sempre lo stesso segno. Prendendo come direzione positiva delle ξ quella che va dalla zona alleggerita verso la premuta (dal continente verso il mare) la u entro la zona risulta sempre positiva. Indicando allora con u_m un valore medio di u opportunamente scelto e notando che

$$\frac{x-\xi}{q^2} = \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi}$$

l'integrale precedente si potrà scrivere, per il teorema della media

$$u_m \lim_{z=0} \int_{-a}^{+b} \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi} d\xi,$$

ove $-a$ è il limite esterno della zona alleggerita e $+b$ quello della zona compressa.

Siano q_1 q_2 le distanze del punto O, che supponiamo sulla superficie, rispettivamente dal limite $-a$ (in terra) e $+b$ (in mare). La (7) allora diventa

$$\Delta_1 g = 2\pi\varrho f \frac{B}{A} \frac{A-2B}{A-B} w + \frac{2B}{A-B} \varrho f u_m \log \frac{q_1}{q_2}, \tag{8}$$

la quale ci esprime l'anomalia di gravità indotta in ogni punto della superficie dalle variazioni di densità che si verificano nella massa. Essa è valida

(1) *Teoria* ecc., pag. 293.

(2) De Marchi, *Applicazioni geologiche della teoria elastica* ecc. Rendiconti Accad. Lincei, 7 aprile 1907, pag. 499.

per tutti i punti entro e fuori la zona di sollecitazione, esclusi due segmenti infinitesimi che ne abbracciano gli estremi.

In essa non è tenuto conto dell'anomalia proveniente dalle variazioni del campo occupato dalle masse. Queste variazioni dànno luogo ad una crosta superficiale di spessore variabile w, sopra e sotto il piano iniziale, e che determina un campo di attrazione positiva dove w è negativa, e viceversa. Inoltre, dove w è positiva, dobbiamo aggiungere il campo determinato dallo strato d'acqua di spessore variabile h.

Indicando con c la parte di superficie dove $w < 0$ (continente), con σ quella dove $w > 0$ (oceano), il potenziale di queste variazioni è

$$V = \varrho \int_c \frac{w_2 dc}{r} - \varrho \int_\sigma \frac{w_1 d\sigma}{r} + \int_\sigma \frac{h d\sigma}{r} = V_1 - V_2 + V_3,$$

ponendo 1 la densità dell'acqua. La profondità del mare h è la somma dello spostamento positivo w_1 nel punto considerato e dello spostamento negativo w_2 rispondente alla linea di costa. L'anomalia completa è

$$\Delta g = \Delta_1 g + f \frac{\partial V}{\partial z} = W + U$$

ove

$$W = 2\pi\varrho f \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} w + f \frac{\partial V}{\partial z}$$

dipende solo dagli spostamenti verticali su tutta la superficie, mentre U, che è l'ultimo termine della (8), dipende solo dagli spostamenti orizzontali nella zona sollecitata. Se il punto O é molto interno nel continente i termini dipendenti da V_2 e V_3 sono trascurabili e il termine dipendente da V_1 assume il valore (essendo g l'accelerazione di gravità, R il raggio terrestre, ϱ_0 la densità media della terra)

$$\frac{3}{2} g \frac{w}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{3}{2} \left(f \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_0 \frac{1}{R^2} \right) \frac{w_2}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = 2\pi f w_2 \varrho,$$

ove w_2, valore assoluto di w, è il sollevamento continentale. Ivi sarà quindi

$$W_c = 2\pi f \varrho \left\{ 1 - \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} \right\} w_2.$$

Per valori normali delle costanti di elasticità questo valore è positivo.

Ponendo infatti il coefficiente di Poisson $\mu = \frac{1}{3}$ è $A = 4B$ e

$$W_c = \tfrac{5}{3} \pi f \varrho w_2,$$

che esprime l'anomalia continentale per le regioni abbastanza lontane dalla zona di sollecitazione, perchè si possa ammettere $U = 0$.

Analogamente in alto mare è trascurabile il termine dipendente da V_1 e quelli dipendenti da $V_2 V_3$ diventano

$$-2\pi f\varrho w_1 + 2\pi f h$$

e

$$W_\sigma = 2\pi f\varrho \left\{ \frac{B}{A} \frac{A-2B}{A-B} - 1 \right\} w_1 + 2\pi f h ,$$

dove il primo termine è negativo. Assumendo come gravità normale la gravità nell'interno del continente al livello del mare, e ponendo che anche in alto mare sia $U = 0$ l'anomalia in alto mare è

$$\Delta_m g = W_\sigma - W_c = 2\pi f \left\{ \frac{B}{A} \frac{A-2B}{A-B} \varrho - (\varrho - 1) \right\} h .$$

Per $\varrho = 2{,}8$ e $\mu = \frac{1}{3}$ essa è negativa ed eguale a $-2{,}6\pi f h$. In unità assolute (cm., gr., sec.) è $f = 6{,}67.10^{-8}$: per $h = 4000$ m. è quindi $\Delta g = -0{,}2$: siamo quindi nell'ordine di grandezza delle anomalie realmente osservate.

Nel passaggio dal continente all'oceano attraverso la zona costiera, subaerea e subacquea, la Δg deve diminuire regolarmente, se la h cresce in modo continuo. Ma a questa variazione dovuta esclusivamente ai moti verticali si aggiunge quella dovuta agli spostamenti orizzontali, rappresentata dall'ultimo termine della (8). Questo termine è nullo sull'asse mediano della zona di sollecitazione, ove $q_1 = q_2$, e si mantiene piccolo in un intorno abbastanza ampio attorno a quest'asse neutro; ma, quando ci avviciniamo ai due limiti della zona di perturbazione, può assumere valori assai rilevanti, tendendo teoricamente all'infinito nei limiti stessi.

L'anomalia che esso determina è negativa sul continente ($q_1 < q_2$) positiva in mare ($q_1 > g_2$) e a sufficiente prossimità dei confini essa prevarrà sull'anomalia indotta dagli spostamenti verticali, determinando un minimo in una zona parallela a quella di massimo sollevamento, un massimo in una zona parallela a quella di massimo sprofondamento. Il primo fatto può dar ragione delle zone di anomalia negativa che seguono le catene montuose; il secondo può forse dar ragione delle eccezionali anomalie positive delle isole d'alto oceano.

Il meccanismo generatore di queste anomalie dovute agli scorrimenti orizzontali è di facile comprensione. Sul limite continentale della zona di sollecitazione si inizia lo scorrimento verso il mare, senza afflusso compensatore dalla terra, e quindi vi è dilatazione; sul limite oceanico si arresta tale scorrimento, e quindi vi è condensazione. Già Helmert attribuì a scorrimenti orizzontali le anomalie che non si accordano coll'ipotesi di Pratt.

Queste due forti anomalie, negativa in terra e positiva in mare, sovrapponendosi alla regolare diminuzione che si stabilirebbe dalla terra al mare, per semplice effetto degli spostamenti verticali, e delle variazioni del campo che ne conseguono, vengono inoltre a determinare un massimo secondario sulla terra in vicinanza del mare, e un minimo secondario in mare presso la terra. Potrebbe così giustificarsi anche l'anomalia costiera, che mi diede impulso a questa ricerca.

Fisica. — *Sulla origine di alcune gravi anomalie recentemente osservate nello studio del fenomeno Zeeman.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Uno dei più importanti risultati ottenuti di recente nello studio del fenomeno di Zeeman, riguarda la disuguaglianza notevole fra la distanza delle componenti esterne del *triplet* osservato nel senso normale alle linee di forza e quella tra le componenti del *doublet* visibile nel senso del campo. Questa disuguaglianza, osservata dal Tenani (1) e poi ritrovata indipendentemente dal Nagaoka (2), è inconciliabile con la interpretazione cinematica del fenomeno Zeeman (3) e con la teoria elementare di Lorentz; ma non è nemmeno d'accordo con la teoria di Voigt, che la prevede solo in misura estremamente più piccola e accompagnata da una dissimetria del *triplet*; mentre secondo il Tenani esisterebbe la disuguaglianza sopra indicata, ma non la dissimetria del *triplet* che ne dovrebbe esser la causa.

Di fronte a un simile risultato si sarebbe indotti a ritenere quasi *a priori* che possa averlo determinato qualche causa disturbatrice. Una di queste si presenta spontanea alla mente, e venne già esaminata dal Tenani per consiglio del Cotton. Sembra cioè ben naturale il pensare che ricorrendo, come egli ha fatto, a masse polari di cui una provvista di un foro per l'osservazione longitudinale, le luci osservate provengano da parti della sorgente luminosa situate in regioni del campo ove questo abbia intensità sensibilmente diverse. Contro questa spiegazione si possono contrapporre due considerazioni:

1. Pare anzitutto poco probabile che nel breve spazio occupato dalla scintilla o dalla parte capillare del tubo Geissler il campo presenti varia-

(1) Rend. Lincei, 18, pag. 677, 1909; 19, pag. 198, 1910.

(2) Nature, agosto 1909, pag. 188.

(3) Tutte le altre anomalie e dissimmetrie di posizione e d'intensità finora constatate (v. anche Dufour, Journ. de Phys., aprile 1910) rispettano ancora la corrispondenza tra il fenomeno Zeeman longitudinale e quello trasversale, qual'è espressa dalla legge di Cornu, che cioè i due fenomeni sarebbero le apparenze diverse secondo le quali le *medesime* vibrazioni circolari o rettilinee, orientate in modo fisso nello spazio, sono viste nelle diverse direzioni.

zioni d'intensità che dovrebbero essere rispettivamente del 10 e del 2 per cento per spiegare i risultati del Tenani.

2. A conferma di ciò, le componenti del *doublet* e del *triplet* (la disposizione ottica è tale che a ciascun punto della sorgente corrisponde un punto e uno solo della immagine spettrale) sono a una distanza costante nella intera loro lunghezza.

Per elucidare questi due punti ho eseguito alcune esperienze, che mi sembra permettano di concludere nel senso di attribuire alla non uniformità del campo le anomalie osservate.

Sulla effettiva distribuzione puntiforme dei valori del campo tra le masse polari di un elettromagnete noi sappiamo quasi nulla, poichè tutti i metodi noti consentono solo la determinazione di un valore medio in una superficie di non piccolissima estensione. Un metodo molto ingegnoso, dovuto allo stesso Zeeman, e fondato sull'aspetto fusiforme dell'area abbracciata dalle componenti esterne del *triplet*, non è di impiego facile, e si presta solo per variazioni molto grandi in una piccola regione del campo.

Un modo assai più comodo è invece il seguente, che oltre l'impiego già fattone per la questione che ci occupa, mi ha permesso lo studio generale del campo in tutto l'interferro dell'elettromagnete, con risultati che saranno esposti in una prossima Comunicazione.

Una vaschetta di vetro, di dimensioni e forma convenienti, è disposta tra i poli dell'elettromagnete e contiene del vecchio ferro Bravais, dotato, come è noto, di una energica doppia rifrazione magnetica negativa, qualora si abbia cura di utilizzare le porzioni superficiali della bottiglia dopo lungo riposo. Con uno spessore di liquido di pochi millimetri, e un campo di 20 mila unità, si possono ottenere parecchie decine di lunghezze d'onda come differenza di cammino tra le vibrazioni parallele e le normali al campo.

La vaschetta è disposta tra nicol incrociati a 45° dalla direzione del campo; con un fascio di luce solare se ne illumina una porzione circolare di un paio di millimetri di diametro (1).

Eccitando il campo la luce ricompare, con una tinta simile a quella che dà il liquido per trasparenza, ma che in realtà è priva delle luci di alcune lunghezze d'onda, quelle per cui la birifrangenza è un multiplo intero della lunghezza d'onda medesima.

Osservando con uno spettroscopio, se il campo fosse uniforme, si avrebbe quindi una larga porzione di spettro (parte di questo è assorbita dal liquido sotto un certo spessore) solcata dalle frange di Fizeau e Foucault. Invece colle masse polari ordinarie lo spettro apparisce continuo. Ciò è dovuto al

(1) Conviene, per quanto non sia necessario, proiettare sulla vaschetta con una lente a lungo fuoco, l'immagine reale e impiccolita di un diaframma circolare; ciò solo quando occorra aumentare la quantità di luce solare utile.

fatto che nei diversi posti della vaschetta traversati dal fascio luminoso, la birifrangenza è diversa, perchè vi è diversa l'intensità del campo. Ma se con una lente si proietta una immagine reale della vaschetta sulla fenditura dello spettroscopio, le frangie appariscono tosto ben nette; esse non son più rettilinee e non seguono le linee di Fraunhofer. La loro forma e la posizione sullo spettro cambiano notevolmente esplorando con la fenditura (come nei metodi spettroeliografici) il disco luminoso che è immagine della porzione illuminata della vaschetta. E poichè la birifrangenza è proporzionale al quadrato dell'intensità del campo, e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda, la forma di ciascuna frangia riferita a una linea di Fraunhofer disegna (in uno spettro normale e a meno di una parte costante) la grafica

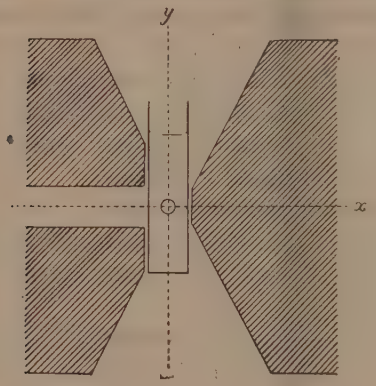


Fig. 1

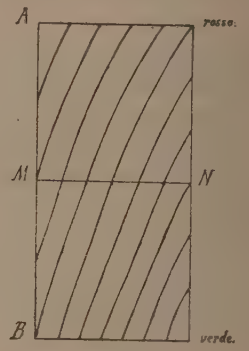


Fig 2

che darebbe l'intensità del campo pei varî punti della regione illuminata della vaschetta, corrispondenti ai diversi punti della fenditura.

Servendosi di uno spettroscopio a visione diretta, girevole intorno al suo asse, si può esplorare l'andamento del campo lungo i varî punti di un diametro qualunque del disco immagine e in particolare dei diametri verticale e orizzontale. In queste condizioni l'esame della distribuzione del campo diviene particolarmente semplice e istruttivo. Così ricorrendo alle due masse polari della forma normale di Weiss, l'una piena e l'altra forata, come nelle esperienze del Tenani (fig. 1), e disponendo la fenditura parallelamente al diametro verticale y del cerchietto luminoso, le frange presentano un aspetto leggerissimamente curvo; esse si fanno sempre più diritte esplorando le corde parallele a y più lontane dal polo massiccio A.

Ciò dimostra che il campo ha sensibilmente la stessa intensità, lungo l'asse y, specialmente ad una certa distanza dal polo. Le variazioni non superano il 2 per cento. Ma disponendo la fenditura orizzontalmente, in modo da esplorare il diametro x del cerchietto, lo spettro appare solcato da frange aventi l'aspetto notevole della figura 2. Esse sono leggermente curve e for-

temente inclinate rispetto alla direzione orizzontale della fenditura. Cosicchè ogni linea di Fraunhofer, come MN, viene tagliata da diverse frange in parecchi punti. Per esempio, in una esperienza in cui le facce polari erano circa a sette millimetri di distanza, e la larghezza MN dello spettro corrispondeva a una porzione centrale di soli due millimetri della vaschetta, nel punto M la birifrangenza corrispondeva a 10 lunghezze d'onda, ed essa diveniva di 16 lunghezze d'onda in N: cioè la linea MN era tagliata sette volte dalle frange. Ciò prova che *basta spostarsi appena di due millimetri nel senso dell'asse x perchè il campo* (proporzionale alla radice quadrata della birifrangenza) *varii gradatamente da 1 a 1,27, subisca cioè un'alterazione del 27 per cento.* Il campo è più intenso, com'è naturale, all'estremo del diametro x più prossimo al polo A [1].

Variazioni incomparabilmente più tenui (ma sempre rivelabili per la squisitezza del metodo) si osservano, come abbiamo detto, nel senso normale al campo, cioè lungo l'asse y.

Or la scintilla o il tubo Geissler si dispongono ordinariamente in direzione normale al campo. Questo spiega perchè il Tenani abbia trovato una distanza quasi costante tra le componenti del *triplet* o del *doublet* nell'intera lunghezza. Ma si riconosce egualmente che le porzioni utilizzate della sorgente, per quanto molto limitata, potevano ben trovarsi nella visione longitudinale e nella trasversale in regioni diverse del campo, che varia del 27 per cento nel senso orizzontale per uno spostamento di soli 2 mm.; specialmente se si tien conto, nel caso della scintilla, del soffiamento che questa subisce, e se si osserva che l'anomalia ottenuta coi tubi Geissler è di entità alquanto minore (circa il 10 % con scintilla tra poli di magnesio, il 5 % con scintilla tra poli di cadmio, il 2 % col tubo Geissler largo mm. 1,8 e pieno di vapori di mercurio).

Ripetendo l'esperienza in condizioni analoghe ma con le masse polari Weiss non forate e limitate da facce piane di circa 5 mm. di diametro cambia moltissimo la forma delle frange; la variazione del campo entro una regione centrale di 2 mm. di diametro si riduce, tanto verticalmente che orizzontalmente a circa l'uno e mezzo per cento; e può diventare del 7 % (nel senso orizzontale) usando tutte e due le masse forate e scostandosi pochissimo dalla regione centrale. La maggior variazione misurata nelle circostanze della fig. 1 usate dal Tenani, si deve attribuire perciò alla dissimetria delle masse polari.

[1] La birifrangenza osservata nei varî punti della vaschetta, poichè questa ha uno spessore di circa mezzo centimetro, dà in verità un effetto integrale lungo il raggio luminoso che la traversa; ma poichè l'andamento delle linee di forza ha un asse di simmetria nell'asse x, e le variazioni del campo son piccole nel senso di y, saranno pure piccole nel senso del raggio luminoso. Non occorreva perciò, in questo caso, dare uno spessore piccolissimo alla vaschetta.

Debbo però riconoscere che una così rilevante variazione del campo in regioni tanto vicine, fu anche per me alquanto inaspettata; e che perciò io non intendo far colpa al sig. Tenani di averla ritenuta improbabile dopo aver accertato che essa era piccola in senso verticale.

Concludendo, il fenomeno paradossale annunciato dal Tenani e dal Nagaoka va tenuto sotto riserva; la sua esistenza sarà dimostrata solo quando esso si ritrovi in un campo veramente uniforme, riconosciuto tale con un procedimento sensibile e sicuro, come quello da me adottato (1).

Fisica. — *Birifrangenza accidentale del ferro dializzato e sua applicazione allo studio dell'efflusso di un liquido in seno allo stesso liquido.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio Pietro Blaserna.

1. Nel corso di una mia ricerca sulla rapidità con cui si manifesta il fenomeno Majorana (2), ho avuto occasione di notare che alcuni campioni di vecchio ferro dializzato, presentano una enorme birifrangenza accidentale. Effettivamente questo comportamento del ferro allo stato colloidale fu notato da G. Quincke sin dal 1902 (3); non mi sembra però privo di interesse far conoscere alcuni miei studî fondati su questo fenomeno.

Fra le numerose soluzioni di ferro colloidale da me possedute e vecchie dai 10 ai 28 anni, quella che presenta la massima birifrangenza accidentale, fu preparata circa 10 anni fa dalla farmacia Candioli di Roma. Il liquido ha l'aspetto sciropposo ed è abbastanza trasparente per poter essere studiato anche sotto lo spessore di 1 cm. La birifrangenza accidentale di esso è sorprendente: posto in una vaschetta di pochi millimetri di spessore, basta il lievissimo tremolìo prodotto camminando nella stanza da lavoro, perchè acquisti una apprezzabile birifrangenza.

(1) Illuminando tra nicol incrociati l'intera vaschetta avente la forma dell'interferro, anche dove questo si allarga, e ricorrendo a luce monocromatica di sufficiente intensità si può fare a meno dello spettroscopio e osservare la vaschetta direttamente con un cannocchiale.

Si accerta allora che l'immagine è solcata da molte frange nere, le quali disegnano in tutta l'estensione del campo le *linee isodinamiche* d'intensità proporzionale alla radice quadrata del rispettivo numero d'ordine. L'esperienza è di bellissimo effetto, potendosi avere nel campo di visione fino a 15 e più frange molto fitte e nettissime e permette di confermare ed estendere i risultati ottenuti con altro metodo. Comunicherò prossimamente le fotografie eseguite, che permettono di riconoscere a prima vista il modo di ripartizione del campo con forme diverse di masse polari.

(2) Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. XIX, 1° sem. 1910, pag. 377.

(3) Ann. der Physik, t. 9, 1902, pag. 969.

Ho determinato i valori di questa in funzione delle velocità con cui scorre il liquido in una vaschetta di vetro a sezione rettangolare di $mm^2\ 2 \times 10$ disposta verticalmente e sufficientemente lunga perchè nella parte centrale di essa il liquido non fosse soggetto a perturbazioni.

Un fascio di luce proveniente da una lampada ad arco, attraversava successivamente un nicol con la sezione principale a 45° rispetto all'asse della vaschetta, la parte centrale di questa secondo lo spessore minore, un

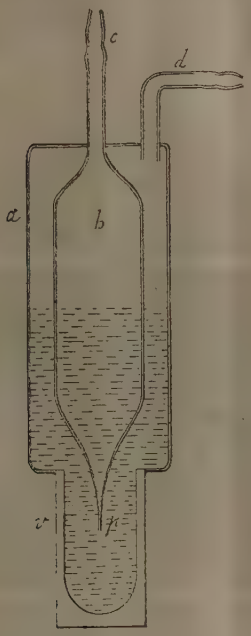


Fig. 1

compensatore di Babinet, il secondo nicol incrociato col primo. Per mezzo di una lente venivano proiettate le frange su uno schermo. Mi limiterò a dire che, facendo scorrere il liquido nella vaschetta con la velocità di appena 40 cm. al secondo, le frange si spostavano all'incirca di una lunghezza d'onda (birifrangenza positiva).

2. Era naturale il pensare che liquidi a sì forte birifrangenza accidentale dovessero prestarsi allo studio dell'efflusso e dell'afflusso del liquido attraverso a un tubo capillare immerso in seno allo stesso liquido.

Ponendo una vaschetta di vetro contenente ferro dializzato fra nicol incrociati a 45°, e producendo nell'interno della massa liquida in essa contenuto l'efflusso o l'afflusso dello stesso liquido mediante una pipetta, si osservano dei bellissimi fenomeni di birifrangenza. Le figure variano col variare della

pressione che obbliga il liquido a passare attraverso all'orifizio della pipetta: non mutano però mantenendo costante la pressione.

Per riprodurre fotograficamente alcune di queste figure, mi servii dello apparecchio riprodotto nella fig. 1. Un recipiente di vetro *a* era in comuni-

Fig. 2

cazione con una vaschetta rettangolare di vetro larga cm. 3 e dello spessore di cm. 0,5. Nell'interno del recipiente *a* vi era un secondo recipiente *b* che terminava nel centro della vaschetta con un tubicino *p* di un millimetro di diametro. Il ferro dializzato riempiva a metà i due recipienti *a* e *b*, le capacità dei quali furono determinate in modo che una pressione costante

di 70 mm. esercitata nel recipiente esterno attraverso il tubo *d*, o nel recipiente interno attraverso il tubo *c*, prolungasse l'afflusso o l'efflusso del liquido attraverso il tubicino *p* per 80″ circa.

L'apparecchio descritto veniva disposto verticalmente fra due nicol. Un fascio di luce attraversava successivamente il primo nicol, la vaschetta nel senso dello spessore ed in modo che l'estremo del tubicino *p* cadesse sensibilmente nel centro del fascio luminoso, ed il secondo nicol. Disposti inizialmente i nicol paralleli, una macchina fotografica veniva collocata in modo da avere sulla lastra l'immagine netta del tubicino *p*.

Nella figura 2 sono riprodotte le fotografie ottenute nelle seguenti condizioni:

Nicol incrociati: A) *Le sezioni principali a 45° rispetto alla direzione dell'efflusso.* — Si ebbero le fotografie 1, 2 e 3; di cui la 1 si riferisce all'entrata del liquido in *b* attraverso il tubicino *p* sotto la pressione di 70 mm.; le altre due all'uscita del liquido dal tubicino *p*; la 2 sotto la pressione di 70 mm., la 3 sotto la pressione di 5 mm.

B) *Una delle sezioni principali parallela alla direzione dell'efflusso.* — Si ottennero le fotografie 1′, 2′ e 3′; la 1′ per l'entrata del liquido in *b* attraverso il tubicino *p*, sotto la pressione di 70 mm., la 2′ e la 3′ per l'efflusso rispettivamente sotto le pressioni di 70 mm. e 5 mm.

Mi propongo di proseguire queste ricerche basate sulla enorme birifrangenza accidentale di alcuni campioni di ferro dializzato, nella speranza di dedurne conseguenze utili agli studî teorici di idrodinamica.

Chimica. — *Sulla picrotossina*[1]. Nota di F. Angelico, presentata dal Corrispondente Angelo Angeli.

In una Nota precedente [2] studiando l'azione dell'acido iodidrico e del fosforo rosso sull'acido α picrotinico $C_{15}H_{18}O_8$, da me descritto tre anni or sono, ho fatto rilevare che esso perde quattro atomi di ossigeno dando origine ad un altro acido della formula $C_{15}H_{18}O_4$, identico a quello ottenuto, molti anni addietro, da Oglialoro e Forte [3] sottoponendo allo stesso trattamento la picrotina.

Quest'acido chiamato dai suddetti autori picrotinico, non è l'unico prodotto che si forma dalla picrotina nella reazione, giacchè come dissi nella Nota precedente, si ottengono diverse sostanze la cui separazione è difficile,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

(2) Gazzetta chimica, v. 40, anno 1910, parte 1ª.

(3) Gazzetta chimica, v. 21, anno 1891, p. 214, parte 2ª.

ma tra queste, oltre all'acido suddetto ho potuto isolare ed analizzare sotto forma di ossima un chetone della formula $C_{14}H_{16}O_3$. A prima vista sembra strano che in un processo di riduzione così energico possa generarsi un chetone, però siccome l'acido iodidrico oltre che come riducente può agire da idrolizzante, io credo che la formazione del chetone, riposi precisamente su un processo idrolitico.

Del resto se esatta questa interpretazione, per trattamento della picrotina con mezzi acidi doveva arrivarsi a prodotti di analoga trasformazione, fatto che ho potuto constatare sperimentalmente.

La picrotina, infatti, in tubo chiuso a 170° con acido cloridrico D 1,19 diluito con l'egual volume di acqua, fornisce un composto anch'esso di natura chetonica della formula $C_{14}H_{15}ClO_3$ differendo solamente dal precedente per avere un atomo di idrogeno sostituito dall'alogeno.

Questa reazione mi ha permesso inoltre di stabilire un fatto di notevole importanza, cioè a dire che la picrotossinina ($C_{15}H_{16}O_6$) e la picrotina ($C_{15}H_{18}O_7$), che differiscono fra di loro per una molecola di acqua e che assieme formano la picrotossina del commercio [1] *posseggono lo stesso nucleo fondamentale* giacchè sottoposte, separatamente, allo stesso trattamento forniscono l'identico prodotto.

La trasformazione tanto della picrotossinina, quanto della picrotina può spiegarsi ammettendo da un lato che l'acido cloridrico reagendo con un ossidrile elimini acqua ed introduca l'alogeno.

$$R — OH + HCl = H_2O + R — Cl$$

e che nel tempo stesso si elimini una molecola di anidride carbonica.

Nella picrotina viene eliminata anche una molecola di acqua precisamente quella che essa contiene in più verso la picrotossinina.

Il prodotto cristallizzato da ligroina si ha in cristalli aghiformi lievemente colorati in giallognolo, colore che perde ricristallizzando da alcool. Fonde a 114°-115°, ed è insolubile negli alcali, anche a caldo, ciò esclude la presenza di ossidrili acidi, non dà acidi idrossamici con acido di Piloty (reazione di Angeli) però con fenilidrazina dà un osazone non alogenato che fonde a 196°, ciò dimostra l'esistenza di un ossigeno chetonico e dell'aggruppamento:

$$\begin{array}{l} — CO \\ \quad | \\ — CHCl \end{array}$$

[1] Berlin Berichte - R. I. Meyer e P. Bruger (V, 31, 1898, pag. 2974) fecero dei tentativi o riscaldando da solo la picrotina o con cloruro di zincc o con acido cloridrico fumante allo scopo di eliminare acqua dalla picrotina per arrivare alla picrotossinina. Non ottennero altro che resine; molto probabilmente nell'azione dell'acido cloridrico dovettero avere fra le mani il chetone su descritto.

Rimangono a determinare nella loro funzione due atomi di ossigeno ed è caratteristico il fatto che tanto nelle sostanze di partenza, quanto in tutti i prodotti da me finora ottenuti, costantemente si riscontrano due atomi di ossigeno sulla cui natura fino a questo momento non è stato possibile portare luce.

Essi rimangono stabili sia di fronte ai processi di ossidazione, come pure verso i mezzi di riduzione, così nell'acido picrotinico $C_{15}H_{18}O_4$, come a suo tempo feci rilevare, due ossigeni si trovano sotto forma di carbossile, gli altri due sono rimasti oscuri, e sottoponendo quest'acido a successiva ossidazione con permanganato potassico, a caldo, ho ottenuto tre acidi

$$C_{15}H_{18}O_4$$
$$\downarrow$$
$$C_{13}H_{16}O_2\ (COOH)_2$$
$$\downarrow$$
$$C_{11}H_{10}O_2\ (COOH)_2$$
$$\downarrow$$
$$C_{11}H_{10}O_2\ (O)\ (COOH)_2$$

nei quali si riscontrarono costantemente quei due atomi di ossigeno.

Questi due ultimi acidi a 13 atomi di carbonio sono stabilissimi, e si possono considerare come i prodotti ultimi di ossidazione che si arrivano ad ottenere col permanganato.

Or se noi per un momento facciamo astrazione di tutto l'ossigeno e rimpiazziamo i due carbossili con due atomi di idrogeno avremo un complesso di carbonio e di idrogeno rappresentato dalla formula

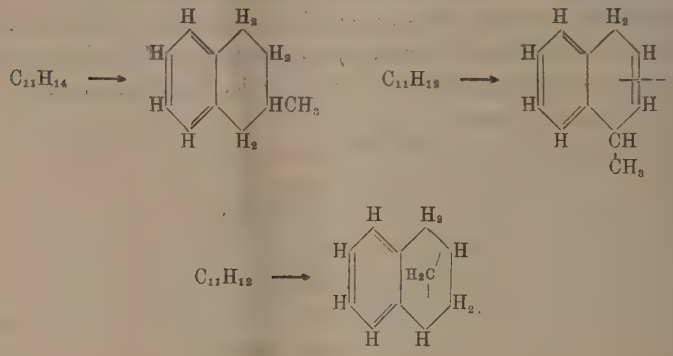
$$(C_{11}H_{12})$$

Data la quantità di idrogeno rispetto al carbonio non è il caso di parlare di catene aperte, specialmente tenendo conto della stabilità degli acidi ai mezzi ossidanti, è necessario supporre l'esistenza di composti ciclici, ed in questo caso la scelta è limitata ad un nucleo a 10 atomi di carbonio.

rimanendo a collocare l'undicesimo. Sempre tenendo conto della stabilità di questi ultimi acidi, distribuendo gli atomi di idrogeno ai vertici di questi due esagoni, siamo condotti ad un nucleo della tetraidronaftalina, però abbiamo ancora un atomo di carbonio il quale potrà esistere solamente formando un ponte nel nucleo idrogenato, giacchè se si trovasse sotto forma di

metile, allora non sarebbe più sufficiente la quantità di idrogeno per un nucleo così stabile; se poi ci limitiamo all'idrogeno, che abbiamo a nostra disposizione, ci troveremo di fronte ad un derivato della diidronaftalina e ciò in aperto contrasto colla stabilità di questi acidi al mezzo di ossidazione impiegato.

I seguenti schemi chiariscono le superiori osservazioni



naturalmente rimane sempre a stabilire se questo metilene contribuisce alla formazione di un trimetilene o di un tetrametilene ovvero di un pentametilene.

E qui mi sembra opportuno far rilevare come l'azione dell'acido cloridrico, precedentemente studiata, riesce anche interessante, perchè esso provoca la rottura di questi ponti rendendo il prodotto più accessibile ai processi di demolizione.

L'esistenza di un nucleo aromatico viene confermata da altri fatti che ho avuto occasione di porre in rilievo durante queste ricerche sulla picrotossina.

La picrotina ed in ispecie la picrotossinina, con alcali, mostrano una grande tendenza ad imbrunire, specialmente se vi si fa gorgogliare dell'ossigeno ovvero si scalda, ciò va in accordo con la presenza di un polifenolo, confermata inoltre dal forte potere riducente di fronte al Fehling, ed al nitrato d'argento ammoniacale.

Inoltre per trattamento con alcali di un acido bromurato (1) della picrotossinina, dopo aver acidificato, si estrae con etere una piccola quantità di prodotto che mostra nettamente il comportamento di un ortodiossicomposto aromatico, cioè colorazione verde smeraldo con percloruro di ferro che passa al violetto per aggiunta di soluzione di carbonato od acetato sodico.

(1) Gazz. Chimica, v. 39, parte I, p. 299.

Ma c'è ancora un altro fatto; Meyer e Bruger (1) dalla picrotina per riscaldamento con acido nitrico ottengono un nitroderivato (anidronitropicrotina) $C_{15}H_{15}O_6 . NO_2$.

Tutti questi fatti non lasciano dubbio alcuno sull'esistenza di un nucleo aromatico ed io a maggiore conferma ho sottoposto l'acido picrotinico $C_{15}H_{18}O_4$ all'azione di un miscuglio freddo di acido nitrico fumante ed acido solforico, in tal modo si arriva con la massima facilità, ad un nitroacido della formula $C_{13}H_{15}NO_5$ il quale è dotato di una grande stabilità di fronte agli ossidanti; e tale resistenza la dimostra anche verso i riducenti, tanto che, con polvere di zinco ed acido acetico o con acido solforico e zinco granuloso, in presenza di alcool, rimane in gran parte inalterato.

Migliori risultati sembra però che si ottengano impiegando solfuro ammonico, giacchè si perviene ad una sostanza che a differenza del nitroacido, che fonde a 166°, fonde a 173°, è discretamente solubile in acqua ed al contrario del nitroacido si mostra sensibile all'ossidazione.

Parte sperimentale.

Azione dell'acido cloridrico diluito sulla picrotossinina e sulla picrotina.

L'azione dell'acido cloridrico su queste sostanze fu studiata nelle più svariate condizioni, e fra i numerosi saggi quello che meglio si presta alla trasformazione di esse è il seguente:

Grammi due di sostanza si pongono in tubo da chiudere con 8 cc. di acido cloridrico D 1,19 diluito con l'egual volume di acqua e poscia si riscalda in istufa per cinque ore alla temperatura di 170°-180°. Quando i tubi sono completamente raffreddatti all'apertura di essi si nota un po' di pressione, ed il gas che si sprigiona non colora la fiamma, il liquido acido è quasi incolore, ed al fondo del tubo sta attaccato il prodotto della reazione di aspetto pecioso.

Separato il liquido e messo a riposo dopo qualche giorno lascia separare un po' di prodotto sotto forma di aghetti bianchi, il residuo vien ripreso a caldo con alcool metilico in cui è sufficientemente solubile, e la soluzione fortemente bruna, che si ottiene, vien bollita prolungatamente con carbone animale. Per filtrazione si ha sempre un liquido colorato, che per raffreddamento lascia separare un po' di prodotto resinoso, decantando poscia il liquido freddo, da questo lentamente si separa il prodotto cristallizzato, e colorato in giallo rossastro. L'ulteriore purificazione si esegue o cristallizzando da ligroina, in cui è pochissimo solubile, specialmente a freddo o dall'alcool,

(1) Berichte, 31, 1898, p. 2974.

nel primo caso si ha in aghetti, nel secondo in scagliette. Fonde a 114°-115° ed all'analisi fornì numeri concordanti con la formula $C_{14}H_{15}ClO_3$.

1) gr. 0,2230 di sostanza diedero gr. 0,5183 di CO_2 e gr. 0,1182 di H_2O.
2) gr. 0,2962 » » gr. 0,1540 di $AgCl$.
3) gr. 0,2458 » » gr. 0,5692 di CO_2 e gr. 0,1340 di H_2O.
4) gr. 0,3318 » » gr. 0,1744 di $AgCl$.

Trovato			Calcolato		
C 63,38	H 5,88	Cl 12,80	C 63,02	H 5,63	Cl 13,32
C 63,15	H 6,07	Cl 12,95			

Le due prime analisi si riferiscono al prodotto ottenuto dalla picrotina le due ultime a quello proveniente dalla picrotossinina.

Assieme a questo prodotto si forma un'altra sostanza solubile in alcali, ma la quantità è così piccola che io l'ho trascurata. Operando nella stessa maniera sulla picrotossina, cioè sul miscuglio delle due sostanze si arriva all'identico corpo.

Azione della fenilidrazina sul prodotto precedente.

Grammo uno di sostanza venne sciolta a caldo in alcool ed alla soluzione fredda vi si aggiunsero grammi due di fenilidrazina sciolta in acido acetico al 50 %. Appena i due liquidi furono in contatto, la massa assunse colorazione giallo d'oro. Dopo circa un'ora, scaldai per pochi minuti su b. m. bollente, raffreddai e versai in acqua, si separò in tal modo un prodotto intensamente colorato in giallo di aspetto voluminoso in principio, ma che presto assunse forma cristallina. Raccolto su filtro e lavato bene con acqua, si pose a seccare su H_2SO_4. Il prodotto cristallizzato dall'alcool, in cui è poco solubile, si ottiene in piccoli cristalli intensameute colorati in giallo che fondono a 196° ed all'analisi fornirono numeri concordanti con la formula

$$C_{14}H_{14}O_2 \quad (N\ NHC_6H_5)_2$$

gr. 0,1622 di sostanza diedero 0,4335 di CO_2 e 0,0954 di H_2O
gr. 0,1514 » » cc. di azoto 16,6 alla temperatura di 14° ed alla pressione di 765 mm.

Trovato	Calcolato
C 72,88	73,23
H 6,53	6,10
N 13,13	13,14

Azione dell'acido nitrico e solforico sull'acido picrotinico $C_{15}H_{18}O_4$.

In un miscuglio freddo di cc. 5 di acido nitrico D 1,48 e di cc. 5 di acido solforico concentrato a piccole porzioni di circa un quarto di grammo, si aggiungono grammi due di acido picrotinico. Non appena il prodotto viene in contatto col miscuglio degli acidi, in buona parte passa in soluzione, colorando il liquido in giallo e con sviluppo gassoso. Quando l'acido si è aggiunto completamente (circa 15 minuti) si agita per poco allo scopo di portare in soluzione le ultime tracce di prodotto rimaste aderenti alle pareti della bevuta, e poscia con getto sottile si versa in acqua ghiacciata; in tal modo si separa subito un prodotto molle, colorato in giallo, che presto indurisce. Si raccoglie su filtro dopo averlo triturato bene in mortaio e si lava ripetutamente con acqua fino a che le acque di lavaggio non colorano più le cartine al metilarancio.

Il nuovo composto si scioglie facilmente negli alcali e nei carbonati, con colorazione lievissimamente gialla e da queste soluzioni riprecipita per aggiunta di acido solforico o cloridrico.

Pochissimo solubile in acqua calda, si scioglie abbastanza in benzolo ed in alcool e da questo solvente si ha in grossi e corti aghi lievemente colorati in giallo e che fondono a 166°. All'analisi forni i numeri che conducono alla formula $C_{13}H_{15}NO_5$.

gr. 0,3265 di sostanza diedero 0,6985 di CO_2 e gr. 0,1586 di H_2O
gr. 0,1953 » » 0,4187 » » 0,1014 »
gr. 0,1979 » » 0,4227 » » 0,1042 »
gr. 0,1810 » » cc. 8,2 di azoto alla temperatura di 13° ed alla pressione di 756 mm.

	Trovato (1)				Calcolato
C	58,34	58,34	58,30		58,86
H	5,35	5,75	5,85		5,66
N	—	—	—	5,60	5,30

Concentrando fortemente le acque madri si ottiene ancora un po' di acido, ma in soluzione rimane un altro prodotto insolubile in alcali che si separa lentamente dopo alcuni giorni. Una piccola porzione seccata su piastra porosa dà un prodotto quasi bianco che fonde verso 110°. La mancanza di

(1) Per quanto io abbia purificato il prodotto ho costantemente ottenuto una percentuale in meno nel carbonio, un pochino più elevata dei limiti di errore analitico (0,6 %). Probabilmente ciò è dovuto o alla presenza di un prodotto maggiormente nitrato ovvero un po' più ossidato.

sufficiente quantità di prodotto non mi ha permesso per il momento di analizzarla.

Il nitroacido su descritto è dotato di una grande stabilità di fronte ai mezzi di ossidazione, così rimane quasi del tutto inalterato, sia sottoponendolo all'azione del permanganato potassico in mezzo alcalino, sia di fronte all'acido cromico in soluzione solforica. Pari resistenza dimostra anche di fronte ai riducenti, così rimane quasi inalterato, per azione della polvere di zinco con acido acetico ovvero dello zinco granuloso con acido solforico diluito in mezzo acquoso alcoolico. Sostituendo l'acido cloridrico al solforico, ed insistendo a ricadere per molte ore, molto probabilmente avviene la riduzione, ma il prodotto che si ottiene mal si presta alla purificazione.

Sembra però che migliori risultati si ottengano impiegando solfuro ammonico. A tale scopo l'acido vien disciolto in ammoniaca e poscia saturato con idrogeno solforato.

Il liquido colorato fortemente in giallo, si riscalda con refrigerante a ricadere, così dopo pochi minuti s'intorbida per separazione di zolfo, e nel tempo stesso si scolora.

Separando per filtrazione lo zolfo ed evaporando il filtrato, rimane indietro un prodotto che fonde verso 170°. È molto solubile in alcool, pochissimo in benzolo, e da questo solvente si separa quasi bianco, fonde a 173°, rammollendo alcuni gradi prima, ma la sua solubilità in acqua ed il suo punto di fusione più elevato rispetto al prodotto di partenza (166°), dimostrano l'avvenuta trasformazione che del resto è maggiormente confermata dal fatto che il nuovo prodotto mostrasi abbastanza sensibile ai mezzi ossidanti.

La mancanza di tempo non mi ha permesso per ora di condurre a termine queste esperienze.

Chimica — *Sul comportamento di talune ureidi e sostanze puriniche rispetto a soluzioni di benzoato sodico* [1]. Nota di Giovanni Pellini e Mario Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [2] noi abbiamo dimostrato che la caffeina in soluzione acquosa forma col benzoato sodico un complesso che è causa dell'aumento reciproco di solubilità di queste due sostanze. La caffeina non è l'unico derivato della purina che venga usato in farmacia, ma trovano impiego altri prodotti sotto forma di sali di queste sostanze, o pro-

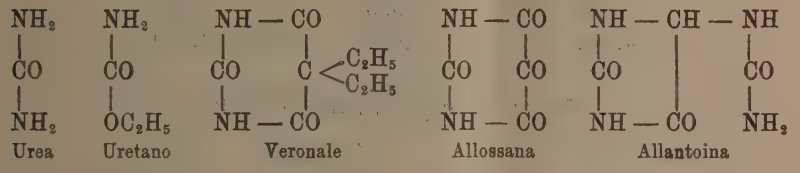
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.
[2] Questi Rendiconti, fasc. 6°, pag. 333, 1° sem. 1910.

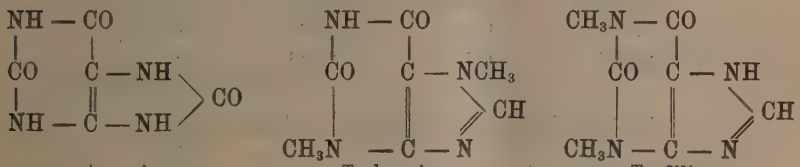
dotti risultanti dall'unione della base purinica con sali alcalini o infine prodotti di unione dei sali alcalini con i sali sodici di questi derivati della purina: fra questi ultimi sono degni di nota la « diuretina » ossia il salicilato di sodio e teobromina sodica, « l'uroferina » ossia il salicitato di litio e teobromina litica, il « benzoato d'uroferina » ossia il benzoato di litio con teobromina litica. Così pure vengono usate alcune ureidi fra cui il « veronale » o acido dietilbarbiturico.

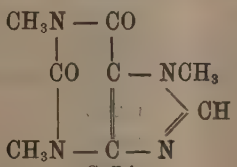
Era perciò interessante di ricercare se altre sostanze aventi costituzione simile o contenenti aggruppamenti uguali a quelli della caffeina, si comportassero in modo analogo verso le soluzioni di benzoato sodico.

Questo studio ha lo scopo di portare un contributo alla conoscenza della vera natura chimica di tutti quei prodotti farmaceutici che risultano dalla unione di alcune delle sostanze sopra nominate coi sali alcalini ed inoltre di vedere in quanto la tendenza a formare tali complessi dipenda dalla costituzione.

Noi abbiamo anzitutto esaminato sostanze contenenti l'aggruppamento $CO\begin{matrix}NH-\\NH-\end{matrix}$ e abbiamo cominciato colla sostanza madre, l'urea. Abbiamo inoltre voluto studiare l'uretano. Poi siamo passati a studiare alcune monoureidi come l'allossana e il veronale o acido dietilbarbiturico: come rappresentanti delle diureidi abbiamo scelto l'allantoina e l'acido urico. Infine fra le basi xantiniche abbiamo impiegato due omologhi inferiori della caffeina e cioè la teobromina e la teofillina.







Urea in acqua ($CH_4ON_2 = 60$)

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 60$	Peso molecolare ($K = 18,5$)
1,500	0,475	0,462	58,4
3,006	0,94	0,926	59,1

Urea in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,234:

Concentrazione dell'urea in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 60$
C	Δ	Δ'
0,749	0,23	0,230
1,944	0,59	0,599
3,654	1,115	1,126

Concentrazione del benzoato in acqua 3,025:

C	Δ	Δ'
1,248	0,385	0,384
2,446	0,755	0,754

Concentrazione del benzoato in acqua 5,180:

C	Δ	Δ'
1,327	0,405	0,409
3,272	0,995	1,008
4,802	1,465	1,480

Uretano in acqua ($C_3H_7O_2N = 89$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 89$	Peso molecolare ($K = 18,5$)
1,072	0,23	0,223	86,1
2,524	0,53	0,524	88,1

Uretano in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,235:

Concentrazione dell'uretano in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 89$
C	Δ	Δ'
1,433	0,295	0,297
2,293	0,47	0,476
3,343	0,68	0,694

Concentrazione del benzoato in acqua 3,207:

C	Δ	Δ'
0,723	0,15	0,150
1,445	0,30	0,300
3,256	0,665	0,676

Concentrazione del benzoato in acqua 5,078:

C	Δ	Δ'
2,096	0,43	0,435
4,896	0,995	1,017

Veronale in acqua ($C_8H_{12}O_3N_2 = 184$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 184$
0,322	0,035	0,032
0,380	0,035	0,038

Veronale in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 3,042:

Concentrazione del veronale in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 184$
C	Δ	Δ'
0,305	0,02	0,030
0,570 il veronale non è sciolto	0,035	—

Concentrazione del benzoato in acqua 3,056:

C	Δ	Δ'
0,281	0,025	0,028
0,534	0,04	0,053
0,720 il veronale non è sciolto	0,04	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,358:

C	Δ	Δ'
0,303	0,020	0,030
0,515	0,035	0,051
0,774 il veronale non è sciolto	0,035	—

Concentrazione del benzoato in acqua 8,184:

C	Δ	Δ'
0,239	0,02	0,024
0,554 il veronale non è sciolto	0,03	—

Allossana in acqua ($C_4H_2O_4N_2 = 142$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 142$	Peso molecolare (K = 18,5)
0,453	0,06	0,059	139,6
1,215	0,17	0,158	132,2
2,230	0,30	0,290	137,5
2,754	0,37	0,358	137,6

Allossana in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 3,196:

Concentrazione dell'allossana in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 142$
C	Δ	Δ'
0,723	0,09	0,094
1,514	0,18	0,197
2,886	0,325	0,375

Concentrazione del benzoato in acqua 4,847:

C	Δ	Δ'
0,912	0,105	0,118
2,645	0,27	0,344
3,506	0,35	0,456

Allantoina in acqua ($C_4H_6O_3N_4 = 158$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m =$
0,248	0,03	0,029
0,263	0,035	0,030

Allantoina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,088:

Concentrazione dell'allantoina in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 158$
C	Δ	Δ'
0,248	0,025	0,029
0,468 l'allantoina non è sciolta	0,04	—

Concentrazione del benzoato in acqua 2,703:

C	Δ	Δ'
0,265	0,02	0,031
0,516 l'allantoina non è sciolta	0,03	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,336:

C	Δ	Δ'
0,356	0,02	0,041
0,603 l'allantoina non è sciolta	0,03	—

Concentrazione del benzoato in acqua 8,319:

C	Δ	Δ'
0,271	0	0,031
0,571	0	0,066
0,837 l'allantoina non è sciolta	0,01	—

Teofillina in acqua ($C_7H_8O_2N_4 = 180$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 180$
0,212	0,02	0,021
0,306	0,025	0,031

Teofillina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,027:

Concentrazione della teofillina in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 180$
C	Δ	Δ'
0,423	0,015	0,043
0,660 la teofillina non è sciolta	0,02	—

Concentrazione del benzoato in acqua 1,725:

C	Δ	Δ'
0,293	0,01	0,030
0,521	0,02	0,058
0,717 la teofillina non è sciolta	0,02	—

Concentrazione del benzoato in acqua 2,728:

C	Δ	Δ'
0,497	0,00	0,051
0,876	0,01	0,090
1,216 la teofillina non è sciolta	0,01	—

Concentrazione del benzoato in acqua 3,220:

C	Δ	Δ'
0,405	0,00	0,041
0,900	0,005	0,092
1,325 la teofillina non è sciolta	0,005	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,419:

C	Δ	Δ'
0,441	— 0,02	0,045
0,829	— 0,04	0,085
1,199	— 0,04	0,123
1,634 la teofillina non è sciolta	— 0,04	—

Dai dati sperimentali si rileva che l'urea e l'uretano si comportano in modo normale in acqua e non formano complessi col benzoato sodico, perchè gli abbassamenti del punto del congelamento calcolati coincidono con gli abbassamenti trovati.

Il veronale si scioglie molto poco in acqua e gli abbassamenti trovati corrispondono ai calcolati. In soluzione di benzoato sodico anche a forte concentrazione non si verifica nè un aumento apprezzabile di solubilità, nè una variazione dei punti di congelamento tali da giustificare l'ammissione di un complesso.

L'allossana in acqua si comporta in modo normale. I pesi molecolari trovati sono un po' inferiori ai calcolati in accordo con la sua non lieve energia acida. In soluzione di benzoato sodico forma sicuramente un complesso e ciò si rileva in modo particolarmente sicuro per la concentrazione di benzoato al 4,847 %.

L'allantoina si scioglie molto poco in acqua e gli abbassamenti trovati coincidono coi calcolati. In soluzione di benzoato sodico la solubilità aumenta leggermente, e la formazione conseguente di un complesso si rileva dalle esperienze in benzoato al 8,319 %, perchè il punto di congelamento del benzoato non viene abbassato, mentre che gli abbassamenti che si dovrebbero verificare sono già sufficientemente rilevanti da escludere un errore sperimentale.

L'acido urico è noto per la sua piccolissima solubilità in acqua, e dalle poche esperienze eseguite non appare che la sua solubilità aumenti in modo sensibile in presenza di benzoato sodico.

La teobromina è pure pochissimo solubile in acqua, ed aumenta la solubilità in presenza di benzoato sodico, in modo però da non potersi prestare a determinazioni crioscopiche conclusive.

La teofillina ha una solubilità in acqua, a freddo, intermedia fra quella della teobromina e quella della caffeina. La sua solubilità aumenta in presenza di benzoato sodico ed essa forma sicuramente un complesso. Il comportamento è a questo riguardo analogo a quello della caffeina e precisamente la differenza fra i punti di congelamento calcolati e trovati aumenta con l'aumentare della concentrazione di benzoato sodico fino a dar luogo, alla concentrazione di 5,419 % di benzoato, ad un innalzamento del punto di congelamento.

È opportuno di rilevare a questo punto che come causa della piccolezza degli abbassamenti o addirittura degli innalzamenti, potrebbe pensarsi ad una retrocessione della dissociazione del benzoato sodico per opera della sostanza aggiunta. Però è evidente che tale effetto, per quanto non possa essere escluso, non può ritenersi sufficiente a generare differenze così notevoli che nella caffeina raggiungono perfino il valore di 0°,50 e 0°,56 (1). Il fatto poi che dopo raggiunta una certa concentrazione non si hanno più variazioni nella temperatura, dimostra in modo decisivo che il comportamento osservato non può dipendere in modo apprezzabile dalla retrocessione ora accennata. È infatti fuori di ogni possibilità che elettroliti così deboli possano far retrocedere in tal guisa la dissociazione di un sale.

Se si confrontano le costanti di dissociazione, come acidi, delle sostanze esaminate con la loro tendenza a formare complessi non si trova una relazione netta.

	k 25° (2)	Aumento di solubilità in benzoato sodico	Formazione di complessi
Urea	—	—	no
Uretano	—	—	no
Ac. dietilbarbiturico	$7{,}3 \times 10^{-8}$	incerto	incerto
Allossana	$4{,}1 \times 10^{-5}$	—	sì
Allantoina	$1{,}1 \times 10^{-9}$	sì	sì
Ac. urico	$1{,}5 \times 10^{-6}$	—	—
Teobromina	$1{,}1 \times 10^{-10}$	sì	incerto
Teofillina	$1{,}69 \times 10^{-9}$	sì	sì
Caffeina	$< 1 \times 10^{-14}$	sì	sì

Si vede però che la caffeina che possiede la costante di dissociazione più piccola è quella che possiede la maggiore capacità alla formazione di un complesso, e che la natura acida non è la causa che favorisca o contrari la formazione di un complesso, perchè l'allossana lo forma e l'acido urico sembra non formarlo pur avendo la prima sostanza una costante maggiore di quella dell'acido urico.

Appare invece probabile che esista, per la formazione di un complesso, una relazione con la costituzione chimica delle sostanze esaminate, e sopra tutto vi influisca la solubilità propria delle sostanze nell'acqua come si vede assai bene nel caso dell'acido urico e della teobromina.

Tuttavia a proposito del veronale, acido urico e teobromina, non è possibile dalle ricerche crioscopiche concludere in modo negativo per la formazione di un complesso in soluzione, per la scarsa sensibilità del metodo: la risposta decisiva spetta certamente alle determinazioni delle isoterme di solubilità.

(1) Questi Rendiconti, fasc. 6°, pag. 333, I sem. 1910.

(2) H. Lundén, Sammlung chem.,- chem.-tech. Vorträge. Band XIV, pag. 1 (1909).

Chimica. — *Sulle proprietà dell'iodio come solvente crioscopico* (1). Rettifica di F. Olivari, presentata dal Socio G. Ciamician.

In seguito ad una breve pubblicazione di Beckmann « Ueber ebullioskopische und kryoskopische Bestimmung von Molekulargewichten in Jod » (2) io presentavo all'Accademia dei Lincei, nella seduta del 7 novembre 1909, una Nota preliminare sullo stesso argomento (3), comunicando alcune determinazioni crioscopiche che in parte formavano l'oggetto della tesi di laurea del candidato (ora dottore) Angelo Delbono, tesi intrapresa sin dal principio dell'anno scorso ed eseguita sotto la mia guida.

A quella Comunicazione, dirò così, embrionale, volevo far seguire una Memoria più dettagliata. Mentre a questo scopo sviluppavo le poche misure ivi riferite, ho constatato con mia sorpresa che alcuni dei dati sperimentali ottenuti dal predetto candidato non corrispondevano al vero, e questo in modo di cui il candidato stesso non mi ha saputo dar ragione.

Perciò ho rifatto rapidamente le esperienze e mi affretto a pubblicare le seguenti rettifiche:

1°) Per stabilire la costante crioscopica dell'iodio si erano adoperate come sostanze normali AsI_3, HgI_2, SnI_4 e PbI_2, ottenendo in media $K = 213$: mentre confermo questo risultato avverto che delle misure relative all'ioduro di piombo non si deve tener conto perchè questo sale si è dimostrato, al contrario, insolubile in iodio.

2°) Riguardo al comportamento crioscopico delle sostanze organiche in iodio, ho constatato che i pesi molecolari sono, in soluzione diluitissima, normali anche per i composti ossigenati, al contrario di quanto facevano supporre le precedenti esperienze. Ho invece confermato ch'essi vanno in generale rapidamente aumentando colla concentrazione e che l'aumento è tanto più rapido quanto più si procede dagli idrocarburi agli acidi.

[Non è fuor di luogo rilevare a questo proposito che nella tabella riportata a pag. 385 (l. c.) i numeri 1 e 2 indicanti i valori del rapporto $i = \frac{\text{PM trov.}}{\text{PM calc.}}$ per un errore dello stereotipo sfuggito nella revisione delle bozze, furono collocati una graduazione (un decimo) più in basso].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Parma, diretto dal prof. Plancher.

(2) Z. anorg. Chem. *63*, pag. 63 (1909).

(3) Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. pag. 384.

3°) Delle determinazioni relative agli ioduri alcalini ed alcalino-terrosi ho ripetuto quelle che si riferiscono all'ioduro di potassio: estendendo il campo delle concentrazioni più di quanto non si facesse precedentemente è risultato che, a forte diluizione, il peso molecolare è assai prossimo al normale, aumenta colla concentrazione (in accordo colle prime misure) e poi decresce. Queste esperienze non sono ancora definitive.

Per il peso molecolare dell'ioduro di calcio e stronzio, a causa della straordinaria igroscopicità di queste sostanze, le determinazioni non mi danno valori ben certi: sto ripetendo le misure con una disposizione che mi permette di operare in ambiente e con sostanze perfettamente secchi.

In altro luogo esporrò dettagliatamente il materiale di cui è parola nella Nota suddetta e nella presente rettifica.

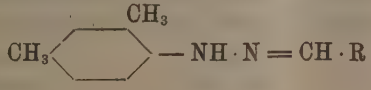
Chimica. — *Relazioni fra la costituzione e la fototropia* (1). Nota di M. Padoa e F. Graziani, presentata dal Socio G. Ciamician.

Nelle due Note precedenti (2) abbiamo esposto i risultati delle nostre esperienze, dirette ad ottenere, nella classe degli idrazoni, delle nuove sostanze fototrope. E tali esperienze, mentre ci conducevano effettivamente al riconoscimento della fototropia in parecchi corpi, mettevano in luce alcune relazioni fra la struttura delle idrazine impiegate e la possibilità di ottenere da esse degli idrazoni dotati della proprietà che ci interessa.

Per estendere e per confermare possibilmente le regole già da noi trovate, ci siamo proposti di prendere in esame le xililidrazine, che possono esistere in 6 diverse forme isomere. Oggetto di questa Nota è di rendere conto dei risultati ottenuti con due delle xililidrazine: di queste, una è quella che deriva dalla xilidina più comune, avente i due metili e il gruppo NH_2 così disposti:

$$\begin{matrix} CH_3 : CH_3 : NH_2 \\ 1 : \quad 3 : \quad 4 \end{matrix}$$

Tale idrazina contiene dunque un metile in posizione *orto* rispetto all'NH_2 e per obbedire alla regola già trovata per configurazioni consimili (*o*-tolililidrazoni, α-naftilidrazoni) doveva dare idrazoni non fototropi. L'esperienza ha infatti dimostrato che gli idrazoni del tipo



non sono mai fototropi.

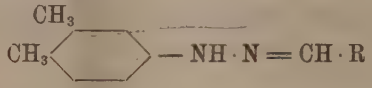
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Questi Rendiconti, 1909, II, 269, 558.

L'altra xililidrazina è quella proveniente dalla xilidina avente i gruppi sostituenti disposti nel seguente modo:

$$\begin{matrix} CH_3 : CH_3 : NH_2 \\ 1: \quad 2: \quad 4 \end{matrix}$$

Per essa si dovevano prevedere dei derivati fototropi, per l'analogia con la m-tolilidrazina e la β-naftilidrazina; l'esperienza ha confermato anche questa previsione, e quasi tutti gli idrazoni del tipo



sono fototropi.

Abbiamo poi completato la serie dei β-naftilidrazoni (noi prendiamo finora in considerazione 8 aldeidi), alcuni dei quali non avevamo ancora esaminato, e dei quali abbiamo accertato quasi sempre la fototropia.

Parte sperimentale.

I. — 1. 3. 4 xililidrazoni.

La 1. 3. 4 xililidrazina fu ottenuta per la prima volta da Klauber (1), ma noi abbiamo trovato più conveniente seguire il metodo indicato da Plancher e Caravaggi (2) per la preparazione della 1. 4. 5 xililidrazina. Abbiamo cioè eseguita la diazotazione della xilidina corrispondente, poi abbiamo ridotto il diazocomposto prima con solfito sodico poi con zinco e acido acetico; l'aggiunta successiva di acido cloridrico concentrato fece precipitare il cloridrato della base. Questo composto, conforme ai dati di Klauber, si scompone a 183°.

1. *1. 3. 4 xililidrazone della benzaldeide*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_5$$

Si prepara sciogliendo in acqua calda il cloridrato dell'idrazina e scuotendo con benzaldeide. Cristallizza dall'alcool in scagliette giallognole, lucenti. È alterabile all'aria. P. F. 86°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	12,50	12,60

(1) Monatshefte *11*, 283, *12*, 211.
(2) Questi Rendiconti, 1905, I, 158.

2. *1. 3. 4 xililidrazone dell'anisaldeide*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . O\,CH_3$

Si prepara come l'altro; dall'alcool si ha in aghi lunghi, sottilissimi, giallognoli; P. F. 97°. Si altera all'aria. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,02	11,05

3. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide cinnamica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH - CH = CH . C_6H_5$

Dal cloridrato di xililidrazina e aldeide cinnamica, in presenza di acetato sodico. Dall'alcool, in cristalli giallo-citrini; P. F. 115°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,19	11,19

4. *1. 3. 4 xililidrazone del cuminolo*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH\,(CH_3)_2$

Si ottiene come i due primi. Dall'alcool un po' acquoso in aghetti bianchi. P. F. 76°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,52	10,53

5. *1. 3. 4 xililidrazone del piperonale*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_3 \langle \begin{matrix} O \\ \diagup\diagdown \\ O \end{matrix} \rangle CH_2$

Dal cloridrato dell'idrazina sospeso in acqua e soluzione alcoolica di piperonale; dall'alcool in cristallini leggermente rosei. P. F. 90°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,44	10,43

6. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide p-toluica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4\,CH_3$

Si ottiene come i primi due; dall'alcool in cristalli minuti color giallo-canarino. P. F. 99°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,77	11,81

7. *1. 3. 4 xililidrazone della vanillina*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_3 \begin{matrix} OH \\ O\,CH_3 \end{matrix}$$

Si prepara come quello del piperonale; dall'alcool in aghi lunghi, sottilissimi, giallognoli. P. F. 99°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,37	10,53

8. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide salicilica*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . OH$$

Si prepara come i primi due; cristallizza dall'alcool in minutissimi aghi gialli P. F. 86°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,67	11,75

II. — 1. 2. 4 xililidrazoni.

La 1. 2. 4 xililidrazina, per quanto ne sappiamo, non fu preparata finora. Abbiamo ottenuto il cloridrato, partendo da 10 gr. della xilidina corrispondente, e operando come si è detto per l'altra idrazina. Il rendimento fu buono, talchè ottenemmo circa 10 gr. di cloridrato, cristallizzato (dall'acqua) in scagliette bianche, lucenti, leggere. Fonde con scomposizione a 197°. Analisi:

	Calcolato	Trovato
C %	55,63	55,46
H »	7,59	8,06
N »	16,24	16,26

Abbiamo anche ottenuta la base libera, che cristallizza dall'etere in aghi bianco-giallognoli: P. F. 57°.

9. *1. 2. 4 xililidrazone della benzaldeide*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_5$$

Dal cloridrato della base in soluzione acquosa, con benzaldeide e acetato sodico: dall'alcool si ha in polvere cristallina lievemente giallognola; P. F. 126°. *È fototropo:* in 2 minuti al sole diventa rosa; si scolora a 120°. Al buio si scolora in 2 o 3 giorni. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	12,50	12,58

10. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide anisica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . OCH_3$

Si ottiene come l'altro; dall'alcool in aghi bianchi. P. F. 116°. *È fototropo:* in due minuti, al sole, si colora in rosso-viola. Si scolora a 95-100°. Al buio retrocede in 2 o 3 giorni. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,02	11,10

11. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide cinnamica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . CH = CH . C_6H_5$

Si ottiene come i precedenti; aghetti gialli dall'alcool; P. F. 153°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,20	11,30

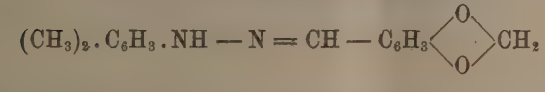
12. *1. 2. 4 xililidrazone del cuminolo*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH(CH_3)_2$

Dall'alcool in lunghi aghi sottilissimi, leggermente giallognoli; P. F. 143°. *È fototropo*: in 3 o 4 minuti al sole assume leggera colorazione rosa, che retrocede al buio in circa 2 giorni. Si scolora per riscaldamento a 110°. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,53	10,66

13. *1. 2. 4 xililidrazone del piperonale*



Dall'alcool in polvere cristallina bianca; P. F. 118°. *È fototropo*: in 2 o 3 minuti si colora in rosso al sole. Retrocede al buio con una rapidità notevolissima, tanto che dopo 10 minuti ritorna al colore primitivo: perciò non si può determinare la temperatura di scoloramento per riscaldamento. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,45	10,49

14. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide p. toluica*

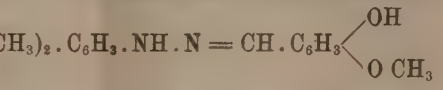
$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH_3$

Dall'alcool in polvere cristallina gialla-canarino; P. F. 135°. Al sole in 3 o 4 minuti assume una colorazione con tendenza al rosa, ma così de-

bole che non si può determinare la temperatura di scoloramento per riscaldamento; al buio retrocede in circa 2 giorni. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11,77	11,77

15. *1. 2. 4 xililidrazone della vanillina*



Si cristallizza da miscele di alcool ed acqua. Polvere cristallina bianca; P. F. 118°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,37	10,42

16. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide salicilica*

Dall'alcool in minutissimi aghi giallognoli; P. F. 157°. *Assai leggermente fototropo*, con tendenza ad una colorazione rosa. Al buio retrocede in circa due giorni. Analisi:

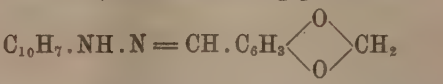
	Calcolato	Trovato
N %	11,67	11,76

Degli ultimi 8 xilidrazoni, 6 sono dunque fototropi.

III. — β-naftilidrazoni.

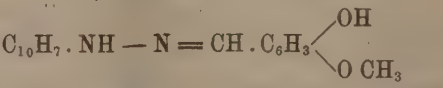
Preparammo del cloridrato di β-naftilidrazina col metodo indicato da H. Meyer (1).

17. *β-naftilidrazone del piperonale*



Dal cloridrato della base con acetato sodico e soluzione alcoolica di piperonale. Cristallizza dall'acido acetico glaciale in aghetti carnicini fondenti a 186°. (2). *È fototropo*, ciò che non ci risulta fosse noto; al sole, in 2 o 3 minuti, il colore rosso aumenta d'intensità; retrocede al buio in 30 ore circa.

18. *β-naftilidrazone della vanillina*



Si prepara come il precedente; si ha in polvere cristallina bianca dall'acido acetico glaciale P. F. 185° (Rothenfusser, l. c., 187°). *È fototropo:*

(1) H Meyer, Analyse und Konstitutionsermittelung organ. Verbind., 1909 pag. 633.
(2) S. Rothenfusser, Centralblatt, 1907, II, 1513.

in 3 o 4 minuti diventa rosso al sole. Ciò era stato osservato anche dall'A. citato, che però non lo conobbe per un caso di fototropia. Retrocede al buio in un giorno o due.

19. *β-naftilidrazone dell'aldeide p-toluica* $C_{10}H_7 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH_3$

Dal cloridrato della base, sospeso in acqua, con acetato sodico e l'aldeide. Cristallizza dall'acido acetico glaciale in scagliette appena gialle. P. F. 188°. *È fototropo*: si colora in 2 o 3 minuti, al sole, fortemente in rosso. Retrocede al buio in 2 o 3 giorni. Per riscaldamento si scolora a 100° circa. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,77	10,79

20. *β-naftilidrazone dell'aldeide salicilica* $C_{10}H_7 . NH . N = CH . C_6H_4 . OH$

Si ottiene come il precedente; cristallizza dall'acido acetico glaciale in aghetti di colore giallo-sporco; P. F. 187°. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,69	10,76

Con questi abbiamo preparato una serie di 8 β-naftilidrazoni, dei quali 7 sono fototropi.

Stiamo proseguendo le esperienze per esaminare il comportamento delle altre xililidrazine.

Geologia. — *L'eruzione etnea del 1910, dal 23 al 31 marzo* [1]. Nota del dott. Francesco Stella Starrabba, presentata dal Corrispondente G. De Lorenzo.

L'Etna, il cui periodo medio di riposo in questi ultimi secoli della sua attività è stato valutato di circa sei anni, dal 1892 al tempo presente non dava alcuno sfogo al magma lavico accumulatosi nelle sue ime viscere. Nel 1899, è vero, si erano avuti alcuni fenomeni di attività nel cono terminale, consistenti nella emissione di materiali detritici causata da poche esplosioni, e nel 1908 un tentativo di eruzione nella Valle del Bove, abortita soltanto dopo pochi giorni, ma questi fenomeni altro non dimostravano che la presenza di magma che tendeva a travasare senza riuscirvi completamente.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Geografia Fisica dell'Università di Napoli.

A questo lungo periodo di repressione, durato circa 18 anni, segue l'attuale eruzione che sin dalle prime ore ha mostrato la sua imponenza. Primo carattere di questa eruzione è la scarsezza di fenomeni premonitorî che quasi costantemente hanno preceduto le eruzioni passate. Durante il 1909 parecchie volte erano state osservate di notte le *fiamme* al cono terminale e durante il giorno qualche improvvisa fumata, che assumeva la forma di un minuscolo pino, carica di cenere. Di queste fumate ne potei notare alcune durante il settembre dello scorso 1909. Qualche terremoto di origine vulcanica era stato avvertito specialmente sulle falde orientali del vulcano. A quanto ho potuto udire, il giorno 22 marzo scorso, nelle alte regioni dell'Etna furono notate, dalle poche persone ivi abitanti, delle forti scosse di terremoto e la mattina del 23 furono viste le *fiamme* o riflessi al cono terminale. Qualche scossa leggera era stata avvertita a Nicolosi da non molte persone quattro giorni prima del principio dell'eruzione. Nella notte dal 22 al 23 furono registrate dall'Osservatorio geodinamico di Catania 23 scosse tutte strumentali.

La mattina del 23 alle ore 8 circa si vide alla base della Montagnola sollevarsi una piccola nube che in breve divenne un enorme pino, e quindi si vide la nube come propagarsi lentamente verso il basso per una lunghezza di qualche chilometro. L'Etna era entrato in periodo eruttivo. Dai paesi etnei e da Catania si cominciarono subito a udire i rombi ed i boati, ma la vista dell'Etna fu presto impedita da fitte nubi, mentre qua e là cadeva la pioggia mista a cenere più o meno abbondante.

Il teatro eruttivo è a sud-ovest della Montagnola e consta d'una fenditura leggermente tortuosa, con direzione predominante nord-nord-est sud-sud-ovest, lunga circa 1500 metri, sulla quale stanno allineate circa 10, o secondo altri, 15 bocche di portata minore col crescere dell'altezza. Mentre la parte inferiore della fenditura sta a 2000 m. sul livello del mare, la superiore si spinge a m. 2400. Le tre bocche inferiori, effusive ed esplosive nello stesso tempo, sono le più attive e, mentre forniscono la lava alla corrente, hanno in sei giorni determinato la formazione d'un cono a pareti ripidissime composto di sole scorie e di notevole altezza. Questo cono e gli altri minori allineati lungo la fenditura, sono stati battezzati, in seguito alla proposta del prof. P. Vinassa, col nome di Monti Riccò, ad onore dell'illustre e popolarissimo direttore dell'Osservatorio astronomico di Catania. Il cono principale s'è formato alla base del Monte Castellazzi ed ha colle sue abbondantissime deiezioni scoriacee obliterato in gran parte la prominenza prima esistente. Le esplosioni di queste bocche avvengono un po' inclinate verso occidente, e sebbene il vento predominante sia stato quello di nord-ovest, pure verso questo punto l'altezza del labbro del cratere si mostra maggiore. Delle bocche esplosive superiori nulla può dirsi con sicurezza, essendo quasi costantemente ravvolte da fitte nubi di vapore con alquanta

cenere ed essendo situate in un punto poco accessibile, ora specialmente che la strada che conduceva al cratere centrale è stata in quei dintorni del tutto distrutta. I terremoti che devono avere accompagnato la formazione di tale frattura sono stati violentissimi, ed oltre alle numerose fenditure che mostrano le pareti della casa cantoniera (Osservatorio meteorico alpino) distante appena 400 metri dal cratere inferiore, lo attestano le fenditure avvenute nel suolo, che io ho potuto accertare presso le bocche del 1892 un pò ad est delle bocche attuali, la cui direzione è nord-sud e rese bene evidenti da sprofondamenti e spaccature nello strato di neve gelata che copre uniformemente quel suolo così instabile. Le esplosioni, durante il breve tempo che mi è stato dato osservarle si susseguono a varî periodi e con varia intensità; non corrispondono in forza colla emissione di materia lavica ma piuttosto coll'emissione di vapori e detriti. Mentre nelle ultime due eruzioni venivano avvertiti costantemente i boati persino da Catania, in quest'ultima, di carattere prevalentemente effusivo, non sono stati avvertiti o debolmente, che i primi due giorni.

La sabbia, emessa soltanto durante i primi due giorni, è stata in quantità assai scarsa, anche vicino al teatro d'eruzione, mentre è stata più abbondante una cenere finissima grigio-bruna. Il cono terminale in tutto questo periodo ha conservato la massima calma. La mattina del quarto giorno (26 marzo) ho potuto osservare dal lato orientale dell'Etna l'emissione continua e tranquilla d'una fitta colonna di vapori e così pure durante il quinto. Il 28 di mattina mostrava dei piccoli sbuffi di vapore seguentisi ad intervalli di 2 minuti. Nei giorni seguenti, nei pochi intervalli durante i quali era possibile osservarlo, non dava segno di attività straordinaria.

Il carattere speciale di questa eruzione è la fluidità straordinaria della lava e, conseguenza di quella e della ripida pendenza, l'enorme velocità della corrente lavica. Formatasi la fenditura il mattino del 23 marzo verso le 8 e 30, la sera verso le 22 la lava invadeva già il piano di San Leo, dopo aver percorso una distanza approssimativa di 6-7 chilometri, con una velocità di circa m. 700 all'ora. Da alcuni mi è stato assicurato che, durante le prime tre ore, tale velocità salì persino ad un chilometro all'ora. Conseguenza della fluidità straordinaria e della forte pendenza è la strettezza della corrente presso alle origini e l'aver seguìto i letti dei torrenti formando parecchie cascate per buon tratto del suo corso. Giungendo alle falde settentrionali del Monte San Leo vi si è spinta risalendo in su come l'onda d'un torrente, per una diecina di metri. Due cascate terribilmente belle ha formato ad oriente del Monte Faggi: la superiore di circa 30 m., l'inferiore di oltre 40 m. e la velocità che quivi ha preso è cosa veramente sorprendente. Alla base di tali dislivelli essa diminuisce poi sino a poco meno d'un metro al secondo e si nota allora nella massa un debole ondeggiamento simile a quello delle acque d'un fiume e causato da oscillazioni dovute all'elasticità della massa.

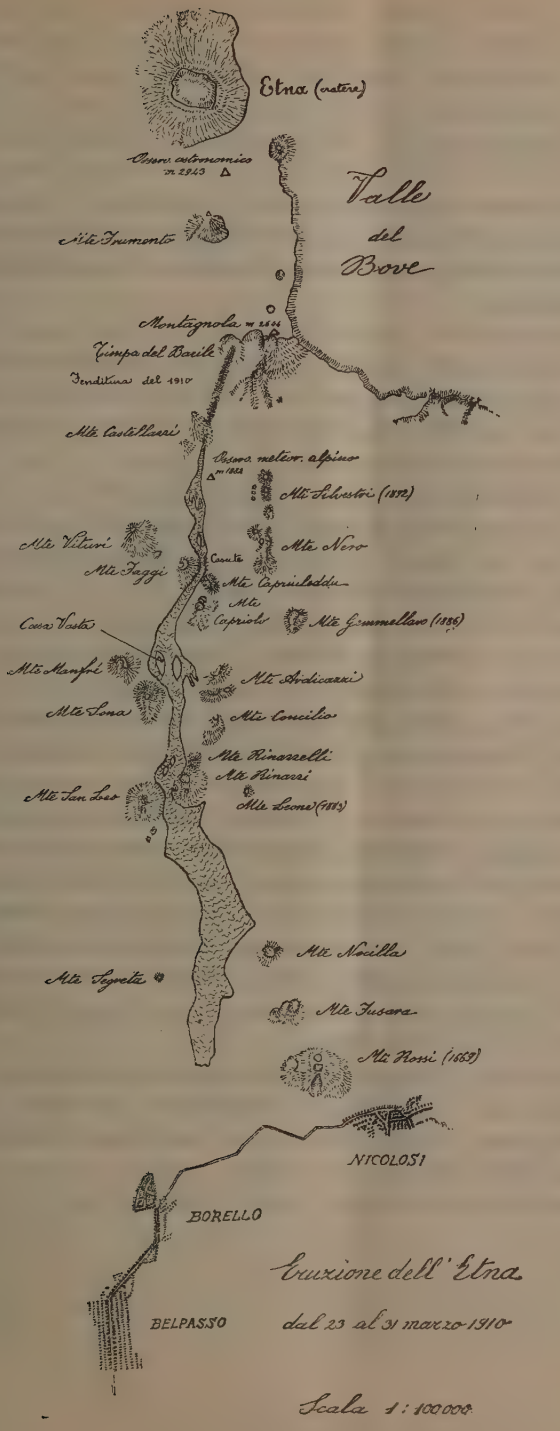
Veri e proprî fenomeni d'erosione furono notati dal prof. P. Vinassa in varî punti della corrente. In alcuni punti, specialmente là dove è piccola la pendenza, si osserva il fenomeno curioso della lava che scorre in senso inverso della corrente principale. Questo ho potuto osservare sulle falde meridionali di Monte Rinazzi, dove un piccolo braccio si è staccato dalla corrente principale correndo verso tramontana ed insinuandosi tra le falde di questo antico cratere ed i fianchi, alquanto distanti, della corrente lavica del 1892. In un piccolo cratere situato sulle pendici occidentali del Monte Rinazzi si è insinuato un piccolo braccio della corrente riempiendo l'antica cavità senza restar legato alla corrente principale che per un braccio assai ristretto. È appunto a sud di questo monte, dove fino a pochi giorni fà si stendevano vigneti e frutteti rigogliosi sopra un piano ridente, che il torrente di lava ha incominciato ad espandersi trasformando il paesaggio in un campo di morte e di rovina.

Guardando adesso il piano dalla vetta di San Leo, non vedesi che una squallida estensione di lava fumante che qua e là va crollando, sollevando delle colonne turbinose di vapori, mentre un'atmosfera satura di gas cloridrici rende impossibile la respirazione. La corrente raggiunge quivi la massima larghezza (circa 700-800 metri) e prosegue poi per altri quattro chilometri sino alla regione fertilissima giacente ad ovest dei Monti Rossi a circa 750 m. d'altezza sul mare. Questo è il percorso compiuto in otto giorni appena e che in lunghezza supera d'un terzo quello delle eruzioni del 1886 e 1892. La velocità che ha il fronte della corrente ho potuto calcolare che varia ordinariamente intorno ai 15 metri l'ora.

Il 29 marzo, essendomi recato all'Osservatorio meteorico alpino, vicinissimo alle bocche d'emissione, calcolai la velocità di quel tratto di corrente intorno ai cinque metri al secondo; avveniva proprio allora un aumento nello sgorgo della lava. La sera del 31 la velocità del fronte è aumentata anch'essa variando dai 35 ai 50 metri l'ora, ed è evidente che tale aumento di velocità debba corrispondere alla spinta impressa circa 48 ore prima da uno sgorgo più abbondante.

La corrente della quale ho potuto tracciare con sufficiente esattezza il corso sulla carta topografica dello Stato Maggiore italiano alla scala dell'1 : 50,000, ha percorso sino ad oggi 31 marzo intorno ai 10 chilometri. Si conserva indivisa per tutta la sua lunghezza eccetto tre piccoli bracci ad ovest di Monte Ardicazzi che si sono presto arrestati ed alcuni altri che si staccano appena dalla corrente a San Leo, ad ovest di Monte Nocilla e di Monte Fusara.

La corrente ha seguìto, dopo il passaggio della gola di San Leo, i fianchi orientali delle colate, variamente sovrapponentisi, del 1892 e del 1886, sorpassandole ad ovest di Monte Nocilla e di Monte Fusara, e coprendole in parecchi punti per varî tratti. In contatto colle lave del 1892 viene pure


Etna (vetta)
Oss. astronomico m. 2943
Valle del Bove
Mte Frumento
Montagnola m. 2346
Pizzi del Bacile
Fenditura del 1910
Mte Castellazzi
Oss. meteor. alpino m. 1923
Mte Silvestri (1892)
Mte Vetori
Mte Nero
Mte Faggi
Mte Caprioladdu
Mte Caprioli
Mte Gemmellaro (1838)
Casa Vasta
Mte Manfrè
Mte Ardicazzi
Mte Lona
Mte Concilio
Mte Rinazzelli
Mte Rinazzi
Mte Lion
Mte Leone (1811)
Mte Nocilla
Mte Segreta
Mte Fusara
Mte Rossi (1669)
NICOLOSI
BORELLO
BELPASSO
Eruzione dell'Etna
dal 23 al 31 marzo 1910
Scala 1 : 100000

ad oriente di Monte Faggi, presso le due maravigliose cascate di cui sopra s'è parlato. Mentre l'altezza della corrente è di pochi metri nel corso superiore, nel piano di San Leo supera certamente in alcuni punti i 40 metri e nella parte inferiore della colata oscilla fra i 6 ed i 15 metri.

La natura petrografica della lava è simile a quella delle ultime due eruzioni del 1886 e 1892, salvo la povertà in interclusi pirossenici, specialmente nelle varietà compatte di essa e l'abbondanza di feldspati labradoritici. L'olivina è abbondante e in piccoli grani, ed a prima vista questa lava sembra di un impasto essenzialmente feldspatico. È grigio-nera, alquanto porosa, pesantissima.

Mi ha sorpreso la grande abbondanza degli interclusi quarzosi bianchi, del tutto simili a quelli descritti per la prima volta da O. Silvetri in varie Memorie per le lave dell'eruzione del 1883 e ad altri delle posteriori eruzioni del 1886 e 1892 che, insieme con altri interclusi di differente natura sono tuttora oggetto d'un mio studio.

La temperatura delle lave è stata misurata dal mio amico Barone De Fiore e riconosciuta oscillante fra i 1200 ed i 1300 gradi, poichè giunse a rammollire una verga di ferro di 9 mm. di diametro della sezione, ed a fondere una verga di rame a sezione di 3 mm.

Degni di nota sono i piccoli turbini osservati lungo la corrente in varî punti, alle volte abbastanza violenti e causati dagli squilibrî, provenienti dalla differenza di temperatura degli strati d'aria lungo la corrente e gli altri più freddi e lontani; questi movimenti sono favoriti talvolta dalla configurazione del suolo, come presso i Monti San Leo e Rinazzi.

Notevole è la quantità di vapori emessi dalle lave dove maggiormente sono accumulate e le sublimazioni di cloruro d'ammonio in molti punti rivestono i fianchi di belle incrostazioni. Camminando a fianco della corrente, specialmente sottovento, la respirazione viene resa difficile dall'abbondanza di vapori cloridrici; presso i crateri si avverte talora un odore penetrante di anidride solforosa. È stato osservato spesso il fenomeno delle fiamme presso alle bocche, ed il colore di queste è stato predominantemente azzurrognolo. Il colore della lava, la notte, è d'un rosso chiaro ed immediatamente presso al cratere si avvicina talora al bianco.

L'emissione di vapori, al contrario dell'eruzione dell'aprile dello scorso anno 1908, è stata in generale poco abbondante e le sabbie, come sopra si disse, scarsissime. Durante i primi giorni da Catania e dai paesi del versante meridionale dell' Etna fu osservata durante il giorno la luce rossa, ed a Catania solo la prima notte piovve, in quantità assai scarsa, una sabbia finissima, nera.

Fisiologia vegetale — *Ricerche sull'assimilazione dell'azoto atmosferico libero nei vegetali* (1). Nota preliminare dei dott. Eva Mameli e Gino Pollacci, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

Già fin dal 1771 il Priestley affermava che alcune piante possono assorbire azoto dall'aria, e più tardi l'Ingenhousz estendeva quest'affermazione a tutte le piante. Ma i loro risultati vennero contrastati successivamente dal De Saussure, dal Woodhouse, dal Senebier e più specialmente dal Boussingault.

È nota la celebre polemica che si svolse tra quest'ultimo ed il Ville durante la seconda metà del secolo XIX, l'uno negando, l'altro affermando che le piante assimilano l'azoto atmosferico non combinato, pur basandosi entrambi su un gran numero di esperienze. La soluzione della disputa venne sottoposta al giudizio di una Commissione, la quale, dopo aver ripetuto col Ville e nelle identiche condizioni, le esperienze da lui fatte, venne alla seguente conclusione che crediamo opportuno riportare:

« L'expérience, faite au Muséum d'Histoire Naturelle par M. Ville, « est conforme aux conclusions qu'il avait tirées de ses travaux anté- « rieurs ».

È strano che questa conclusione, che dà piena ragione al Ville, sia poi stata dimenticata, o male interpretata dalla massima parte degli autori (2), forse causa la grande autorità del Boussingault il quale ebbe gran numero di partigiani.

Il problema principale dell'assimilazione *diretta* dell'azoto atmosferico per parte delle Fanerogame, venne in seguito trascurata, specialmente a causa del grande interesse destato dagli importantissimi lavori del Berthelot, del Hellriegel, del Frank, del Willfarth, dello Schloesing, del Laurent, del Winogradsky, ecc. che scopersero e studiarono l'assimilazione dell'azoto atmosferico dovuta ai micromiceti, sia isolati che in simbiosi con piante superiori, attirando essi per lungo tempo sui loro geniali lavori l'attenzione degli studiosi. Nè le Memorie che comparvero negli ultimi anni sull'assimilazione dell'azoto libero atmosferico per opera delle piante superiori, portarono nuova luce su questo importante problema. Dimodochè si può dire che tutt'ora manchino esperienze rigorose (3), e risultati che valgano a decidere in modo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico della R. Università di Pavia.

(2) Pfeffer, Physiol. veget., I, pag. 401. Paris, 1904.

(3) Come tali non possiamo ritenere quelle recenti del Jamieson, che sono condotte sia istologicamente, che chimicamente, con metodo così poco rigoroso, che non dànno assolutamente seria garanzia sulle affermazioni in esse contenute, come dimostreremo nella Memoria completa.

sicuro tale questione, che. rimasta insoluta dopo la polemica Boussingault-Ville. viene a torto, dalla massima parte degli studiosi, considerata come risolta in favore dell'opinione del Boussingault (1).

Allo scopo di portare nuovo contributo alla risoluzione di questo importantissimo argomento, noi istituimmo delle ricerche, i cui risultati, per quanto non possano venire ancora generalizzati a molte famiglie di piante, pure crediamo bene di rendere ora noti, anche per prender data.

Il metodo seguito nelle nostre ricerche fu il seguente: le piante sottoposte ad osservazione si fecero sviluppare in matracci o sotto campane ermeticamente chiuse e accuratamente sterilizzate, entro le quali passava dell'aria completamente esente da composti azotati e da microrganismi. I primi venivano trattenuti facendo passare l'aria ambiente, prima attraverso lunghi tubi contenenti pomice imbevuta di acido solforico concentrato, e di potassa, poi attraverso boccie di lavaggio ad acido solforico e ad acqua; i secondi per mezzo di filtri di cotone sterilizzato. Prima di farla entrare nelle campane, l'aria veniva arricchita di una determinata quantità (4 %) di anidride carbonica pura. Le culture vennero fatte, parte in mezzo liquido, parte in sabbia di quarzo purissima. I liquidi nutritizî, sterilizzati, erano esenti da nitriti, nitrati, sostanze ammoniacali e sostanze organiche azotate ed avevano la seguente composizione:

	Per le crittogame e le piante acquatiche	Per le fanerogame
KH_2PO_4	gr. 0,2	gr. 0,4
$CaSO_4$	» 0,2	» 0,4
$MgSO_4$	» 0,2	» 0,4
$Fe_2(PO_4)_2$	» 0,02	» 0,04
H_2O	» 1000	» 1000

Nelle nostre esperienze cercammo di studiare l'assimilazione dell'azoto in piante appartenenti a gruppi, classi ed ordini diversi, seminando per le crittogame spore e talli piccolissimi, e per le fanerogame, sia terrestri che acquatiche, semi, anch'essi sterilizzati e di dimensioni molto piccole. o, per alcune specie, piccoli propaguli.

Data la tenue quantità di azoto contenuta in questo materiale, è lecito dedurre che la notevole quantità di esso, contenuta nelle piante ben sviluppate che noi ottenemmo, debba provenire dall'azoto libero dell'atmosfera, non avendone esse a disposizione da alcun'altra sorgente; l'analisi chimica infatti ha confermato ciò.

La descrizione completa del metodo, i numerosi risultati ottenuti e le relative analisi saranno pubblicate allorchè le esperienze tuttora in corso saranno ultimate.

(1) Tanto più che nelle esperienze del Boussingault a noi pare non siano state del tutto evitate le cause d'errore, come avremo occasione di dimostrare.

Per ora rendiamo noti i risultati seguenti:

1). Sottili sezioni, fatte al microtomo, di talli di licheni (*Physcia parietina*, *Cladonia furcata*, *Lecidea* sp.) messe sopra quarzo e gesso, inumiditi con la soluzione nutritizia suddetta, diedero dopo qualche mese, col metodo di cultura sopra descritto, dei piccoli talli normali. Risultato eguale si è ottenuto sinteticamente usando, invece delle piccole sezioni, spore di licheni e di *Protococcus*.

2). Piccoli protalli di felci posti nelle stesse condizioni di cultura, hanno vegetato e prodotto piantine agamiche ben sviluppate. Queste culture non progredirono però per molto tempo, per cause diverse. Sono in corso altre esperienze in proposito.

3). Ottimi risultati ottenemmo anche con culture di *Salvinia auriculata* e di *Azolla caroliniana*. Messe in liquido nutritizio, secondo il metodo sopra descritto, delle piantine con poche foglie, queste vegetarono e si moltiplicarono dando — come nelle condizioni normali — numerose altre piantine a foglie ben sviluppate, che si rendevano indipendenti l'una dall'altra. Era quindi evidente la non piccola quantità di azoto libero che esse avevano assimilato dall'atmosfera. Così da quattro piantine che avevano complessivamente 10 foglie, dopo otto mesi di cultura, se ne sono ottenute 92; in altra cultura durata 45 giorni, da 200 foglie se ne ebbero 479 e analoghi risultati abbiamo ottenuto costantemente da numerose altre culture.

4). Fra le piante superiori, quelle che ci hanno dato finora migliori risultati sono state le *Lemne* (*major* e *minor*), dalle quali ottenemmo costantemente, partendo da poche foglioline, la formazione di numerose piante prodottesi per gemmazione. Esempio: 200 foglie di *Lemna major*, pesanti gr. 0,6185, diedero dopo 41 giorni di cultura 454 foglie, pesanti gr. 1,8425, realizzando quindi un aumento in peso fresco di gr. 1,2240, ossia del 197,89 %.

5). Piante di diverse specie (*Anthurium, Salvinia, Lemna, Tradescantia, Salvia, Begonia, Canna,* ecc.) tenute per molti giorni sotto campana in aria confinata, ne assorbirono una parte (come veniva facilmente dimostrato da appositi manometri — con termometro per la correzione — applicati alle campane) e l'analisi dell'aria rimasta dimostrò che nel maggior numero dei casi era avvenuta (in tali condizioni) una diminuzione nella percentuale dell'azoto gasoso. L'azoto libero è stato dunque assorbito dalle piante mantenute per un certo tempo in aria confinata.

È bene notare che nei liquidi di cultura, esaminati dopo un lungo periodo di vegetazione, non si trovarono i bacteri nitrificati, nè alcuna traccia di azoto combinato.

Le nostre esperienze ci dimostrarono altresì che non tutte le piante sono egualmente capaci di tale assimilazione. Questo fatto verrebbe a giustificare in parte le controversie che sin qui hanno dominato su quest'argo-

mento. e forse è da attribuirsi ad esso la convinzione, generalmente accettata, della non assimilazione dell'azoto libero atmosferico per parte dei vegetali superiori, convinzione che ha ritardato la risoluzione di un problema tanto importante per la Fisiologia vegetale e per la Biologia in genere, per quanto il metodo dimostrativo da seguirsi fosse assai semplice.

Riportiamo in questa Nota preventiva alcuni dati ottenuti dalle analisi fatte, riservandoci di riferire per esteso i risultati complessivi.

Il metodo seguito per la ricerca quantitativa dell'azoto contenuto nelle piante fu quello di Kjeldahl modificato dall'Jodlbauer, che è il più indicato per l'analisi dell'azoto nelle piante, poichè dà modo di calcolare l'azoto totale in esse contenuto, compreso quello dei nitrati.

Risultati:

I. *Azolla caroliniana*. Durata della cultura: un mese. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 75,67 %.

II. *Lemna major*. Durata della cultura: quaranta giorni. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 89,47 %.

III. *Lemna minor*. Durata della cultura: quaranta giorni. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 133,33 %.

Per l'analisi dei gas usammo per l'ossigeno tanto il metodo Lindemann quanto quello con l'acido pirogallico, e per l'anidride carbonica la potassa caustica.

I gas combustibili eventualmente presenti venivano bruciati in pipetta eudiometrica. L'azoto era calcolato per differenza. Gli apparecchi usati furono quelli di Hempel e di Gino Pollacci.

Risultati:

I. *Salvinia auriculata*. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 2,77 %.

II. *Anthurium* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 12,98 %.

III. *Tradescantia* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 6,11 %.

IV. *Salvia* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 3,71 %.

Questi ultimi risultati non hanno valore come dati analitici quantitativi perchè la percentuale dell'azoto diminuita, dipende dalla quantità d'aria contenuta entro la campana e soprattutto dallo sviluppo e dal numero degli organi vegetativi della pianta, fattori dei quali non tenemmo conto, ma dimostrano in modo certo che la pianta ha assorbito dell'azoto libero.

Patologia vegetale. — *Ricerche istologiche su diversi vitigni in rapporto al grado di resistenza alla fillossera.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

In precedenti lavori ho espresso la convinzione che le cause della resistenza antifillosserica di alcune viti, risiedano, oltre e più che nella composizione chimica dei succhi, nelle proprietà specifiche di irritabilità e di reazione dei tessuti alle conseguenze della puntura dell'insetto.

Un medesimo tessuto, il parenchima corticale della radice, è irritabile infatti in un grado molto diverso nei varî vitigni. Mentre il sapore dei succhi, che determina soprattutto il grado di ricettività, più facilmente può venire a variare per le mutabili condizioni dell'ambiente, in modo che viti non accètte alla fillossera possono diventarlo, e viceversa, le proprietà di irritabilità, per quanto in ultima analisi si esplichino esse pure con fenomeni di natura chimica, sono più intimamente collegate ai caratteri specifici strutturali delle varie viti, costituendo fattori intrinseci di resistenza, meno facilmente modificabili dal mondo esterno.

Le proprietà chimiche di molte sostanze elaborate dalle radici possono determinare effettivamente una resistenza dovuta a un minimo grado di ricettività, ma una semplice variazione nelle condizioni di clima e di terreno, può far scomparire un simile carattere. La decantata resistenza di vitigni nostrali in speciali condizioni di *habitat*, quando essa non dipenda da alcune circostanze ormai note, è spesso riferibile a una simile causa. Se, oltre a questo, altri fattori non intervengono, una tale resistenza è solo temporanea, perchè determinata da condizioni esterne che possono subire le maggiori modificazioni. Al contrario, le proprietà specifiche di irritabilità e di reazione del citoplasma all'azione parassitaria della fillossera, quando si esplichino in una misura sufficiente, possono conservare una resistenza anche elevata in quelle viti nelle quali il grado di ricettività per l'insetto siasi notevolmente aumentato per variazioni avvenute nella composizione chimica dei succhi.

Nella generalità dei casi però un minimo grado di ricettività va unito sempre a una debole irritabilità dei tessuti, che non reagiscono con abbondanti proliferazioni cellulari.

Ci si potrebbe quindi domandare se l'esistenza di questi due ordini di fattori della resistenza, come fenomeni distinti fra loro, non sia che apparente, se cioè la supposta maggiore o minore irritabilità non possa dipendere da una variazione di virulenza dell'attacco (durata e profondità relativa del succhiamento, quantità e qualità delle secrezioni versate nei tessuti) in seguito allo stimolo più o meno attivo che sostanze di vario valore nutritivo possono

esercitare sulla fillossera. E d'altra parte, potremmo anche domandarci se, astrazion fatta dal sapore dei succhi, una minima irritabilità dei tessuti potesse costituire una causa determinante di per se stessa un grado minimo di ricettività (1).

I numerosi fatti che intorno a tali questioni ho potuto osservare da alcuni anni, mi permettono di mantenere una distinzione netta fra questi due ordini di fattori, per quanto riconosca che in certi casi le loro singole azioni si sovrappongono per modo che ben difficilmente se ne può valutare il giusto valore come parziali determinanti del risultato complessivo.

È evidente che una stretta correlazione esiste fra le qualità chimiche dei succhi e le proprietà di irritabilità del citoplasma. È solo la maggiore variabilità delle prime, sotto l'influenza di agenti esterni, che rende possibile una giusta interpretazione dell'azione singola di questi fattori nel determinare il grado di resistenza.

Nella presente Nota desidero riferire sommariamente di estese ricerche che ho eseguite intorno a una questione che riguarda appunto una parte di quanto ora ho accennato, e cioè se e quale correlazione esista fra la struttura normale della radice e l'entità dell'alterazione prodotta dalla fillossera. Io mi sono proposto, portando un accurato esame sulle principali specie pure, varietà ed ibridi della vite, di stabilire se una tale correlazione, già ammessa da alcuni studiosi e da altri negata, sussista effettivamente. Queste mie ricerche sono state eseguite dal 1908 ad oggi sopra materiale raccolto nei R. R. vivai di viti americane di Palermo, Spadafora (Messina), Noto, Vittoria, Lecce, Arizzano (Lago Maggiore), della R. Scuola di agricoltura di Conegliano, della Scuola nazionale d'agricoltura di Montpellier, e in altre molte località della Sicilia e del continente. Ai direttori dei vivai suddetti, al prof. L. Ravaz rivolgo i più sentiti ringraziamenti per il cortese aiuto prodigatomi mettendo a mia disposizione l'interessante e ricco materiale delle loro collezioni ampelografiche.

Eterorizia. — Una distinzione delle radici secondo diversi tipi di struttura e di funzione è stata studiata (2) sino ad ora nelle dicotiledoni erbacee, anche perenni; per le piante legnose esistono scarse ricerche (3), assolutamente

(1) Per la fillossera gallicola, più che per la radicicola, la formazione di una iperplasia dei tessuti rappresenta senza dubbio una condizione necessaria per il normale svolgersi del suo sviluppo.

(2) Rimpach A., *Beiträge zur Physiologie der Wurzeln* (Berichte der deutsch. bot. Ges. 1899, pag. 18); Tschirch A., Ueber die Heterorhizie bei Dykotylen Flora, vol. 94, 1905, pag. 68; Neuber E., *Beiträge zur vorgleichenden Anatomie der Wurzeln vorwiegend offizineller Pflanzen, mit besonderer Berücksichtigung der Heterorhizie der Dicotylen* (Inaugural Diss. Breslau, 1904).

(3) Von Halten H., *Beiträge z. vergl. Anat. d. Wurzeln., nebst Bemerk. über Wurzethyllen, Heterorhizie, Lentizellen* (Diss.). Göttingen, 1908.

fanno difetto i dati sopra i diversi tipi di radici a struttura secondaria. Nella vite è frequente il caso di osservare due sorta di radici erbacee: un primo tipo caratterizzato da un piccolo diametro, da uno sviluppo assai precoce degli elementi legnosi, da un rapido accrescimento in lunghezza, da un mediocre sviluppo del parenchima corticale. Questo tipo fonde in sè le caratteristiche della radice di fissazione e di nutrizione. Un secondo tipo presenta uno sviluppo notevole del parenchima corticale, a cui deve il grosso diametro, gli elementi legnosi si differenziano più tardi e in minor numero, l'accrescimento in lunghezza è lento. Si tratta di una radice a materiali di riserva.

Questa distinzione può farsi anche per le radici a struttura secondaria. Nel primo tipo è assai sviluppato il corpo legnoso e le fibre liberiane; il midollo è spesso cambiato in un grosso cordone di libriforme, lignificato, o molto ridotto. Il parenchima corticale e i raggi midollari sono poco sviluppati. Il secondo tipo è caratterizzato da un massimo sviluppo dei tessuti parenchimatici, da una notevole riduzione del libro duro, spesso da pochi fasci legnosi separati tra loro da larghissimi raggi midollari. A parità di età, il diametro di queste radici è assai maggiore di quelle del primo tipo, ma il differenziamento dei singoli tessuti è in uno stadio molto più arretrato in questi organi di riserva. Anche la caduta della prima peridermide vi è ritardata.

Confrontando fra di loro una radice legnosa di una *Riparia* o di una *Rupestris* con una di *Vinifera* le differenze anatomiche che ne resultano corrispondono, in un modo alquanto esagerato, a quelle esistenti tra una radice di fissazione e una di riserva di uno stesso vitigno.

È per questo che in molti ibridi europei-americani una tale eterorizia ha più un significato anatomico determinato dall' incrocio, che quello di una necessaria divisione di lavoro fisiologico. Il clima a lungo periodo di siccità dei paesi meridionali esagera frequentemente un tal fenomeno; la formazione di radici carnose rappresenta in tal caso per molti ibridi europeo-americani una vera necessità fisiologica, ma anche un pericolo per la maggior facilità con la quale la fillossera attacca questi organi ricchi di materiali nutritivi (1). Ma di ciò mi occuperò più oltre. Ora desidero far osservare che nella valutazione dei caratteri anatomici delle diverse radici, anche di uno stesso vitigno, si devono costantemente tener presenti queste oscillazioni strutturali.

Esame di alcuni caratteri istologici che possono essere considerati come indici di resistenza. — I caratteri anatomici sui quali diversi studiosi hanno rivolto la loro attenzione ritenendoli come altrettante cause o esponenti del grado di resistenza sono i seguenti: spessore del parenchima corticale (Foëx), larghezza dei raggi midollari (Foëx-Müller), spessore delle pa-

(1) L'analisi chimica svela in queste radici una maggior quantità di zuccheri, e una diminuzione degli acidi (ossalico, malico) e delle sostanze tanniche.

reti cellulari e larghezza delle punteggiature in questi tessuti (Foëx-Müller), lignificazione più o meno precoce (Foëx), supposta esistenza di speciali meristemi nella corteccia (Szigethi-Gyula), sviluppo maggiore o minore delle fibre liberiane (Pichi), che funzionerebbero da corpi isolanti ostacolando la trasmissione dell'irritazione (Szigethi-Gyula), precocità della caduta della prima peridermide (Millardet-Ravaz).

Ho studiato 70 vitigni di diversa resistenza confrontandone i caratteri istologici della peridermide, del parenchima corticale, del libro, del legno, del midollo e dei raggi midollari.

Non potendo fare nella presente Nota la descrizione per esteso di tutti questi caratteri nei varî vitigni, mi limito ora a far conoscere quali sono quelli che possono esser considerati quali indici di un elevato grado di resistenza. Essi sono: la durata della prima peridermide, maggiore o minore precocità e sviluppo del libro duro, rapporto fra la larghezza dei raggi midollari primarî e il diametro del cilindro legnoso.

Dirò subito che questi caratteri non hanno mai un valore assoluto e che il resultato del loro esame in molti casi deve essere accompagnato da quello di altre proprietà fisiologiche della radice per trarne una conclusione soddisfacente sul possibile comportarsi di un vitigno sconosciuto di fronte agli attacchi della fillossera. In altra Nota farò conoscere quali altri caratteri dipendenti dall'attività fisiologica dei diversi tessuti radicali possono completare quelli forniti dalla struttura istologica.

La determinazione esatta, sistematica delle particolarità anatomiche della radice ha però una grande importanza nello studio degl'ibridi. Si può con un attento esame delle radici di 1, 2 e 3 anni stabilire quali caratteri del genitore più resistente e in qual misura sieno rappresentati nella radice dell'ibrido. Spesso i caratteri morfologici esterni delle parti aeree o delle radici stesse non permettono di apprezzare nel giusto valore questo rapporto di relativa fusione dei caratteri dei genitori (1). E ben vero che tessuti identici a quelli della madre o del padre possono comparire o scomparire in una stessa radice senza alcuna regolarità, ma si possono sempre determinare le oscillazioni massime che presentano i caratteri predominanti.

I caratteri da trascurare sono: spessore del parenchima corticale, che è subordinato alle proprietà della peridermide, spessore delle pareti cellulari dei tessuti parenchimatici, larghezza delle punteggiature, lignificazione più o meno precoce.

Circa l'esistenza di speciali meristemi supposta da Szigethi-Gyula ho già mostrato come questa opinione, pure avendo un fondamento di verità, sia stata determinata da un errore di osservazione (2).

(1) In generale i caratteri anatomici delle radici degl'ibridi non concordano con quelli morfologici presentati dalle foglie.

(2) Cfr. questi Rendiconti, vol. XVIII, 1909, pag. 491.

Esaminerò ora brevemente il valore da assegnarsi a ciascuno dei tre caratteri sunnominati (1).

Durata della peridermide periciclica. — Nelle radici che conservano per molto tempo, anche sino a 3 anni, la prima peridermide, questo tessuto sul principio del secondo anno ha un'attiva formazione di nuovi strati suberosi, che subentrano a quelli più esterni che si lacerano per il continuo accrescimento della radice.

Questa semplice disquamazione del sughero, senza che si formi un nuovo strato fillogenico più profondo può essere confusa, in un esame affrettato, con la formazione di un vero ritidoma. È col formarsi di questi nuovi strati che hanno origine le lenticelle, mancanti nei primi tempi dell'esistenza della peridermide periciclica. Questa disquamazione del sughero varia nella sua frequenza da vitigno a vitigno.

La lunga permanenza della prima peridermide permette al parenchima corticale di raggiungere un notevole spessore. Sono in generale le viti che hanno il loro *habitat* normale in paesi caldi, in terreni soggetti a siccità che presentano un notevole ritardo nella perdita della peridermide periciclica. In due modi si esplica l'azione della maggiore precocità della caduta di questo tessuto in rapporto alla resistenza:

1) col produrre la pronta esfoliazione di una gran parte delle tuberosità formatesi sulla corteccia secondaria (Milladert, Ravaz);

2) con l'accelerare la perdita o la notevole diminuzione di cellule o strati cellulari a proprietà meristemali, facilmente irritabili e che normalmente sotto l'influenza della puntura fillosserica producono le tuberosità. È un fatto che ho bene accertato quello della latente natura meristemale nella generalità delle cellule del parenchima corticale della corteccia avente ancora la prima peridermide.

La puntura della fillossera è a questo riguardo un indicatore sensibilissimo.

L'entità dell'alterazione nelle radici a struttura secondaria decresce infatti con l'avanzare dell'età. Gli strati cellulari sensibili sono localizzati man mano sempre più verso la periferia. Un parenchima corticale di una radice di *Riparia* o di *Rupestris* al 2° anno di età è paragonabile a quello di una radice di 4 o 5 anni di *Vinifera*. Le proprietà meristemali delle cellule della corteccia da latenti si fanno manifeste all'inizio e nel principio del periodo vegetativo, è possibile allora stabilire nei diversi strati cellulari l'esistenza e il valore di questa attività di accrescimento. Essa varia da vi-

(1) M. Gard (*Études anat. sur les Vignes et leurs Hybrides artificiels*) ha preso in considerazione il calibro dei vasi, la grandezza dei grani di amido, sviluppo del midollo, numero delle cellule a rafidi, raggi midollari, ecc. ma non è riuscito a stabilire un criterio di sicura comparazione. I suoi resultati sono soprattutto senza importanza per ciò che riguarda i caratteri anatomici della resistenza.

tigno a vitigno ed è ben lungi dall'essere eguale in tutte le radici con lo stesso periodo di permanenza della prima peridermide. Questa diversità nel numero e nella localizzazione degli strati attivi della corteccia acquista una speciale importanza per spiegare la penetrazione più o meno profonda e la struttura delle tuberosità nei diversi vitigni.

La caduta della peridermide periciclica ha per effetto di spostare verso la periferia gli elementi proliferanti e di diminuirne il numero in corrispondenza dei raggi midollari. Col differenziarsi della corteccia terziaria i singoli settori della radice vengono a perdere quella relativa individualità, anatomica e fisiologica, che si conserva lungamente in molte radici a debole resistenza e che è manifestata, nei casi più salienti, dall'enorme e preponderante sviluppo dei raggi midollari primarî in confronto all'esiguo e ritardato sviluppo di quelli secondarî. È per tal modo che la maggiore o minore precocità della caduta della peridermide periciclica può indirettamente indicarci che certi caratteri *giovanili* della radice, i quali rappresentano un grave pericolo nel caso di un'infezione fillosserica, possono perdurare più o meno. È da notare però che la durata della prima peridermide non può darci un'utile indicazione che nel caso della sua brevità. La sua permanenza sino alla fine del 2° o all'inizio del 3° anno non potrà indicarci altro che la possibilità del verificarsi di tuberosità penetranti; l'irritabilità delle cellule, suscettibili di dividersi, essendo subordinata a molti altri fattori che conviene determinare isolatamente. Esistono così molte viti resistenti come la *Berlandieri*, la *Cordifolia*, la *Rotundifolia*, la *Coriacea*, la *Cinerea*, che presentano una lunga permanenza della peridermide periciclica, anche sino al 3° anno, e delle quali non pertanto è nota la difficoltà a fillosserarsi o a produrre tuberosità penetranti. A questo riguardo è interessante lo studio della radice dei *Cissus*, piante non attaccate dalla fillossera e presentanti per certi riguardi una struttura simile a quella della *Rotundifolia*, *Berlandieri*, *Cordifolia*, *Cinerea*. L'immunità dei *Cissus* è dovuta, come quella della *Rotundifolia* prevalentemente alle proprietà chimiche dei succhi delle radici e alcune di queste proprietà sono partecipate dalle viti che, pur presentando una lunga permanenza della peridermide periciclica, sono resistenti alla fillossera.

Nella *Riparia*, nella *Rupestris*, e un po' meno nella *Candicans*, la caduta della prima peridermide è precoce. Specialmente nelle prime due viti senza alcun dubbio si deve ammettere fra le altre una causa della resistenza di natura prettamente anatomica. Nella *Riparia* più che nella *Rupestris* il parenchima corticale resta notevolmente ridotto dopo la caduta della prima peridermide, il suo accrescimento intercalare è quasi soppresso, i raggi midollari corticali accrescendosi per la quasi esclusiva attività del cambio. Nella *Rupestris* invece è più palese la permanenza di proprietà meristemali nelle cellule del parenchima corticale terziario. La resistenza di questo vi-

tigno è da attribuirsi anche a proprietà chimiche fortemente variabili sotto l'influenza dell'ambiente, e lo stesso io credo debba avvenire per la *Candicans*. In Sicilia relativamente ho trovato più di frequente delle tuberosità sulle radici di *Rupestris* che non su quelle di *Riparia*.

Ravaz ha dimostrato come la *Berlandieri* posta in condizioni di essere attaccata dalla fillossera formi delle tuberosità assai penetranti quali la struttura della sua radice fa prevedere.

L'attitudine di questa vite a crescere nei climi caldi e secchi spiega come la sua coltivazione nella Italia meridionale non abbia determinato una sensibile variazione nel grado della sua resistenza, dovuta prevalentemente a proprietà chimiche dei succhi radicali.

Negl'ibridi fra *Riparia* e *Rupestris* la peridermide periciclica cade al primo anno, come in ambedue i genitori, con un leggero ritardo in confronto della *Riparia*.

Negl'ibridi *Rupestris-Vinifera* la caduta della prima peridermide è ritardata sino alla fine del 2° anno e anche sino all'inizio del 3°, prevalendo il carattere di *Vinifera*. Ciò avviene tanto se la *Rupestris* ha funzionato da padre o da madre nella produzione dell'ibrido. La più lunga permanenza della peridermide periciclica si presenta meno preponderante negl'ibridi *Berlandieri-Riparia*, *Berlandieri-Rupestris*, nei quali la caduta di questo tessuto avviene nel 2° anno, con un sensibile ritardo in confronto alla *Berlandieri*. È indifferente se questa vite abbia funzionato come padre o madre.

Alcune proprietà, probabilmente di natura chimica (1), che nelle radici di *Berlandieri* determinano un minimo grado di ricettività, si trasmettono in modo molto variabile ai prodotti d'incrocio di questa vite con altre specie, cosicchè essa non comunica spesso ai suoi ibridi tutte le sue qualità migliori di resistenza. È per questa ragione forse che dall'incrocio della *Riparia*, della *Rupestris* con la *Berlandieri* derivano vitigni i quali non posseggono un grado di resistenza eguale a quello dei genitori. Il ritardo della caduta della prima peridermide rappresenta senza dubbio una diminuzione delle proprietà peculiari della *Riparia* e della *Rupestris*, senza che una tale diminuzione sia compensata dall'acquisto, in grado sufficiente, dei fattori prevalentemente chimici della resistenza proprî alla *Berlandieri*. Questo fatto diventa ancora più manifesto negl'ibridi *Berlandieri* × *Vinifera* e *Vinifera* × *Berlandieri* nei quali la predominanza dei caratteri di *Vinifera* non può essere equilibrata dalle minime e variabili proprietà di resistenza ereditate dalla *Berlandieri*, a meno che condizioni favorevoli di suolo e di clima non ne esaltino la benefica influenza.

Gl'ibridi *Riparia-Labrusca*, *Riparia-Aestivalis*, *Rupestris-Aestivalis* ecc., si comportano per ciò che riguarda la caduta della peridermide quasi come gl'ibridi di *Riparia-* e di *Rupestris-Vinifera*.

(1) Ne tratterò prossimamente.

Negl'ibridi complessi la caduta della prima peridermide avviene tardi (al 3° anno o alla fine del 2°) se fra i genitori entra a far parte anche un solo vitigno presentante questo carattere. La *Solonis* (*Riparia — Rupestris — Candicans*?) cambia la peridermide alla fine del 1° o più frequentemente all'inizio del 2° anno (la *Candicans* alla fine del 1° anno).

È interessante il fatto che vitigni a durata egualmente lunga della prima peridermide, come la *Vinifera, Labrusca, Berlandieri*, determinino un diverso ritardo della caduta di questo tessuto nei loro ibridi con *Riparia*, o con *Rupestris*; la *Vinifera* a questo riguardo sembra possedere un maggiore antagonismo con le specie resistenti, ciò che è dimostrato anche dal modo di comportarsi di altri caratteri anatomici (libro duro) negl'ibridi di 1ª generazione.

In altra Nota dirò di quest'ultimo tessuto e di altri caratteri.

Fisiologia — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Azione del succo gastrico sulla zeina e sulla gliadina* (1). Nota II di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani.

Chi si propone, mediante lo studio analitico delle diverse proprietà fisiologiche, di pervenire alla conoscenza del *valore nutritivo* di una determinata sostanza alimentare, deve indubbiamente, come uno dei quesiti preliminari, risolvere quello della sua *digeribilità* per opera dei varî succhi digerenti attivi normalmente nel tubo gastro-enterico.

È pertanto che le presenti ricerche fanno parte integrante del mio piano generale di analizzare coi metodi fisiologici gli effetti dell'alimentazione maidica (2).

Allo scopo di poter meglio, mediante il confronto, rilevare le eventuali differenze nel comportamento della zeina all'azione dei fermenti proteolitici del corpo animale, istituii contemporaneamente le medesime prove sulla gliadina, che è la corrispondente proteina (solubile in soluzioni alcooliche) della farina di grano, e talora anche sull'albumina d'uovo (Merck) sgrassata.

Nella presente Nota espongo i risultati ottenuti col *succo gastrico* (pepsina), riserbandomi di comunicare più tardi quelli ottenuti col succo pancreatico.

(1) Nell'eseguire la prima serie delle seguenti ricerche fui aiutato dal dott. Ferruccio Baffoni, che ne utilizzò i risultati per comporre la sua tesi di laurea in medicina e chirurgia. Inoltre i risultati di queste ricerche furono argomento di una comunicazione sommaria al Congresso della Società italiana per il progresso delle scienze (Padova, sett. 1909, cfr. Atti. pag. 536).

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, sed. del 3 maggio 1908, vol. XVII, 1° sem., 609-617.

Preparazione delle proteine. — Fu applicato il secondo metodo accennato nella Memoria precedente, tanto per estrarre la zeina, che la gliadina. Per quest'ultima si utilizzò quella specie di farina di grano, che porta commercialmente il nome di *fiore*.

Per sgrassare le due proteine mi servii anche stavolta dell'acetone.

Su alcune proprietà della zeina così preparata tenni parola nella Memoria precedente. Per la gliadina dirò, che è una polvere finissima e candida (più bianca della zeina, che presenta sempre una lievissima tinta giallognola). Inoltre, a differenza della zeina, i granuli di gliadina messi in acqua lentamente si rigonfiano e si agglutinano. Non oppone perciò a questo solvente la stessa resistenza ad essere disgregata.

La reazione del biureto manifestata dalla gliadina avviene più prontamente che per la zeina; il che forse dipende appunto dalla accennata sua proprietà di non essere totalmente insolubile nell'acqua.

Aggiungerò che da un chilogrammo di farina di grano (fiore) si estrassero gr. 33,300 di *gliadina* sgrassata e disseccata, mentre da un chilogrammo di farina di mais si ottennero gr. 35,400 di *zeina*.

Il *succo gastrico* mi fu fornito per tutte le esperienze dal piccolo stomaco di un cane operato alla Pawlow il 25 marzo 1909, tuttora vivente in ottime condizioni. L'acidità totale del succo determinata più volte col metodo titrimetrico si trovò pressochè costante, lievemente più forte di una soluzione $\frac{n}{10}$ di HCl, ossia corrispondente incirca ad una soluzione 0,4 % di HCl. Era per lo più perfettamente limpido e fluente: raramente commisto a qualche fiocco di muco. In questo caso lo si filtrava prima di adibirlo nelle ricerche.

Con aggiunta di una goccia di soluzione diluita di Cu_2SO_4 non dava precipitato: l'aggiunta successiva di soda determinava un leggerissimo colore violetto.

Il *metodo* sperimentale della prima serie di ricerche consisteva generalmente nel porre una piccola quantità (oscillante tra 15 e 20 cgr.) di zeina o gliadina in 5 cc. di succo gastrico, senza aggiunta di antisettici, a digerire in una stufa regolata a 37°-40° C. In seguito posi a digerire quantità di proteine notevolmente maggiori (fino 5 gr. per volta) in quantità di succo corrispondentemente più forti (25, 50 e 100 cc.).

Gli effetti della digestione erano stabiliti:

a) tenendo conto della quantità delle proteine disciolte;

b) eseguendo su campioni prelevati dal liquido soprastante la reazione del biureto nel modo seguente: 1) aggiungevo al liquido una goccia di soluzione diluita di Cu_2SO_4 per vedere se insorgevano precipitati, e 2) aggiungevo poi alcune goccie di soda. Tenevo conto della colorazione assunta immediatamente dal liquido, che era violetta o rossa, con tutte le gradazioni intermedie a seconda della prevalenza dei peptoni formatisi.

Sapendo per le ricerche del Pawlow e della sua scuola che una non lieve importanza nell'attività digerente del succo si deve ascrivere alla *qualità* del cibo assunto dall'animale e determinante la secrezione gastrica del piccolo stomaco, sperimentai con succhi provenienti da diversa alimentazione (carnea, lattea, di pane di grano, di polenta). A questo riguardo dirò subito, che a prescindere dall'azione, più o meno forte e rapida dei varî succhi, stabilita già dal Pawlow e dai suoi allievi, non ho potuto ottenere risultati concordanti e manifesti, che mi autorizzino ad affermare o a negare recisamente che essi posseggano delle proprietà digerenti *specifiche* in rapporto alla sostanza, che determina la loro secrezione. Debbo però riconoscere che le esperienze istituite in proposito non possono considerarsi esaurienti, perchè relativamente scarse di numero e non tutte potute eseguire con rigorosità di metodo scientifico.

Risultati. Condenserò i risultati della prima serie di ricerche riferendone le conclusioni generali.

Gliadina. 1. I granuli di gliadina a contatto col succo gastrico, scesi al fondo del vasetto, cominciano dapprima a rigonfiarsi per poi subire in un tempo relativamente breve (una o due ore) l'azione digerente del succo. La quale azione si manifesta col diminuire dello strato solido di sostanza sino quasi alla scomparsa. La reazione del biureto eseguita su un saggio del liquido sovrastante indica la presenza di peptoni assumendo la colorazione rosea-rossa.

2. Prolungando la digestione si osserva un comportamento diverso. Il liquido di limpido o quasi limpido va facendosi lattiginoso, finchè man mano si separano dei fiocchi bianchi di precipitato, che si vanno depositando sul fondo, in parte anche lungo le pareti del vasetto. Questo precipitato bianco-fioccoso non presenta più l'aspetto granulare della gliadina e nel decorso di uno o due giorni raggiunge il suo massimo volume. Anche la reazione del biureto è diversa, poichè torna ad assumere colorazione violetta.

Zeina. 1. I granuli di zeina a contatto col succo gastrico, scesi al fondo del vasetto, non si rigonfiano, ma mantengono ben netto il loro carattere granulare. Subiscono tuttavia anche essi l'azione dissolvente del succo, però in un tempo relativamente più lungo della gliadina. Lo strato solido va infatti diminuendo man mano, senza però quasi mai scomparire del tutto. Il minimo volume è raggiunto dopo 24-48 ore.

La reazione del biureto, eseguita su un saggio del liquido soprastante, indica molto chiaramente la presenza di peptoni assumendo di regola una nettissima colorazione rossa.

2. Per quanto si prolunghi la digestione non si osserva successivo intorbidamento di liquido e formazione di precipitato bianco fioccoso. Così pure la reazione del biureto dà sempre colorazione rossa.

Da questi risultati si deduce, innanzi tutto, che il succo gastrico di cane ha azione digerente tanto sulla gliadina che sulla zeina, colla differenza che quest'ultima oppone alla detta azione una resistenza notevolmente maggiore.

Gliadosi e *zeosi*. I prodotti di digestione — che si possono indicare coi nomi di *gliadosi* e *zeosi* — presentano molte proprietà già note per altri proteosi.

Oltre infatti alla accennata loro reazione caratteristica del biureto offrono le seguenti proprietà.

Per prepararli filtrai i liquidi di digestione; i filtrati furono neutralizzati e quindi evaporati a una temperatura di 60° C circa. Dapprima si ottiene una sostanza giallognola di consistenza e tenacia bituminosa, che si distende a fili. Completamente disseccata e polverizzata finemente si presenta di color bianco-grigio, fortemente igroscopica. Ha il grato odore caratteristico dei peptoni. Precipita abbondantemente con soluzioni di acido fosfovolframico Solubile in alcool a 75°.

Dai risultati delle precedenti ricerche emerge però un altro fatto, che cioè, col prolungare dell'azione del succo gastrico sui prodotti di digestione della gliadina, questi si ritrasformano in composti proteici che si separano di nuovo dal liquido. Ciò non accade affatto o per lo meno in una maniera insensibile per i prodotti di digestione della zeina.

All'intento di approfondire questo ultimo fenomeno istituii una seconda serie di esperienze, di cui reputo opportuno riferire in dettaglio le due seguenti.

Esperienza I.

26 agosto 1909. Ore 16.

Si pongono *cinque* grammi di gliadina e *cinque* di zeina rispettivamente con *cento* cc. di succo gastrico filtrato in due bottiglie a tappo smerigliato a digerire in istufa a 40° C. Per controllo si pone nella stessa stufa un vasetto contenente solo succo gastrico.

27 agosto, ore 8.

Il vasetto della gliadina mostra precipitato bianco fioccoso depositato sul fondo e lungo le pareti. Liquido torbido lattescente.

Quello della zeina contiene liquido chiaro trasparente, sul fondo si riconosce uno strato di zeina granulare ricoperto da uno straterello bianco polverulento.

Il vasetto del succo gastrico non mostra cambiamenti di sorta.

Si aspirano dal liquido, sovrastante i depositi, *dieci* cc. tanto dal vasetto della gliadina, che da quello della zeina. Si versano in due vasetti distinti (di cui indicheremo per brevità col nome di G_1 quello contenente i dieci cc. di gliadina e di Z_1 quello contenente i dieci cc. di zeina), che si ripongono alla stufa a 40°. Mentre il liquido, così aspirato, proveniente dalla bottiglia della gliadina è latteo, lasciando riconoscere nel suo seno dei finissimi granuli bianchi natanti, quello della zeina è perfettamente limpido.

Il rimanente mestruo delle due bottiglie si filtra, e del filtrato limpidissimo di ambedue le digestioni si aspirano *cinque* cc. per ciascuna, che si ripongono in vasetti distinti parimenti in istufa a 40°, indicando con G_2 il vasetto e il liquido della gliadina

e con Z_2 quello della zeina. Ambedue questi liquidi sono al momento in cui si collocano nel termostato perfettamente trasparenti.

Ore 11,45. G_1 contiene abbondanti fiocchi bianchi in parte già depositati sul fondo e lungo le pareti. G_2, Z_1. e Z_2 perfettamente limpidi.

Ore 16,45. Tanto G_1 che G_2 contengono un liquido lattiginoso bianco opaco, con fiocchi sedimentati manifesti in G_1. Z_1 e Z_2 perfettamente limpidi e trasparenti.

Nel contempo si osserva, che tanto il filtrato della gliadina che quello della zeina, da cui provengono G_2 e Z_2, mantenuti alla temperatura ambiente (20-24° C) sono ambedue inalterati, ossia totalmente limpidi.

In seguito questi due filtrati sono neutralizzati e se ne preparano, per evaporazione i *gliadosi* e *zeosi*, che pesati allo stato più secco possibile risultano:

gliadosi = gr. 4,500
zeosi = gr. 4,400.

I residui della digestione rimasti sul filtro sono parimenti disseccati e pesati.

Residuo della gliadina = gr. 0,650
» » zeina = gr. 1

Quest'ultimo lascia perfettamente riconoscere tutti i caratteri della zeina granulare inalterata. È solo un po' più colorato intensamente in giallo. Il residuo della gliadina non pare invece potersi del tutto identificare colla gliadina granulare. È di colore grigiastro.

28 agosto, ore 9.

In G_1 e in G_2 si è depositato uno spesso strato solido fioccoso bianco (con una lieve punta in giallognolo) dello spessore di 2 a 5 mm. in G_1 e di 2 mm. in G_2.

In Z_1 si nota sul fondo un tenuissimo straterello biancastro polverulento. In Z_2 e nel vasetto contenente solo succo gastrico nessun precipitato.

I liquidi sovrastanti di G_1 e G_2 sono lattiginosi, mentre quelli di tutti gli altri vasetti sono perfettamente limpidi.

Ore 18. Identiche condizioni.

Nè si manifestarono ulteriori modificazioni nei seguenti giorni.

Esperienza II.

11 ottobre 1909. Ore 9,50.

1 gr. di gliadina e 1 gr. di ovalbumina (Merck) sgrassata si pongono ciascuno con 20 cc. di succo in due grandi pesafiltri a digerire in istufa a 40° C. I granuli di ovalbumina si rigonfiano e in parte si dissolvono.

Ore 11,30′. Ambedue le sostanze sono quasi totalmente disciolte. I mestrui sono filtrati.

Il filtrato della gliadina è alquanto opaco lattiginoso, l'altro è limpidissimo. Di ciascun liquido si aspirano due parti aliquote, che si versano in due vasetti a tappo smerigliato, e di cui indicheremo con G_1 e G_2 quelli contenenti il liquido proveniente dalla digestione della gliadina, e con A_1 e A_2 quelli del liquido dell'ovalbumina. Tanto G_2 che A_2 prima di essere rimessi, insieme agli altri due, nella stufa a 40° vengono riscaldati a bagnomaria alla temp. di 92° C. Non mostrano coaguli, anzi G_2 si chiarifica dopo tale trattamento.

Reazione del biureto dei due filtrati: per quello della gliadina rosso-viola intenso, per quello dell'albumina rosso-porpora intenso.

Ore 14.30′. Nei quattro vasetti non si nota apprezzabile cambiamento.

12 ott. Ore 8,55′.

In A_1 si osserva una sottile nubecola di precipitato pulverulento al fondo del vaso, mentre il liquido sovrastante è completamente limpido.

In A_2 nessun cambiamento.

In G_1 si nota abbondantissimo precipitato bianco fioccoso che dal fondo si eleva al di sopra della metà della colonna del liquido, che è opaco latteo.

In G_2 si vede al fondo un lievissimo precipitato bianco fioccoso, mentre il liquido sovrastante è limpido.

Biureto, rosso-viola per tutti i liquidi, più intensamente rosso per A_2.

Alle ore 17,30′ dello stesso giorno e nei giorni successivi si notarono identiche condizioni.

Risultati. Dalle suesposte esperienze risulta dunque, chiaramente, che il succo gastrico di cane esercita sulla gliadina una duplice azione, dopo averla scissa cioè in prodotti proteici più semplici (peptoni: gliadosi), in una fase successiva trasforma questi in composti, che precipitano e si depositano sul fondo. Tenendo conto del fatto che la reazione del biureto, mentre dapprima colla sua colorazione rossa indica la presenza di peptoni, successivamente torna a mostrare colorazione violetta, si potrebbe ritenere che nella seconda fase si formino composti proteici più complessi dei peptoni. Ossia il succo gastrico sarebbe capace, in questo secondo periodo, di ricostituire dai gliadosi proteine più complesse.

Sta di fatto inoltre, che riscaldando previamente il liquido a 92° C si impedisce questa seconda azione del succo gastrico, il che farebbe credere trattarsi di una vera azione enzimatica.

Il suddescritto fenomeno potrebbe sembrare analogo a quello noto col nome della reazione di Danilewski, ossia della cosidetta formazione di plasteine o di coagulosi. Sebbene anche io inclini a ritenere che sia essenzialmente della stessa natura, pur tuttavia esistono delle differenze, che desidero porre in rilievo. Nel caso su descritto infatti, non solo trattasi di proteine vegetali, ma si ottiene la precipitazione con una concentrazione di peptoni relativamente molto lieve e di più la si osserva come fenomeno, che succede immediatamente e nello stesso mestruo alla proteolisi. Essa è inoltre *specifica*, almeno quantitativamente, se non qualitativamente, della gliadina. Infatti non l'ho osservata, se non in una misura quasi insensibile, per l'albumina d'uovo e per la zeina. La quale ultima proteina ha pure tante altre proprietà fisico-chimiche in comune colla gliadina.

Tornando finalmente a considerare i risultati delle presenti ricerche dal punto di vista, da cui avevo preso le mosse, concluderò che la gliadina e la zeina mostrano notevoli differenze di comportamento all'azione del succo gastrico di cane: a) *La zeina oppone una resistenza molto maggiore della gliadina ad essere digerita, ossia trasformata in prodotti proteici peptoniformi (gliadosi e zeosi);* b) *mentre, inoltre, i gliadosi sono capaci di subire per opera del succo gastrico, in una fase successiva, la trasformazione in composti proteici probabilmente più complessi, che precipitano e si separano dal liquido, gli zeosi restano invece inalterati.*

Anatomia. — *Ricerche sopra la segmentazione del romboencefalo* (1). Nota del dott. PRIMO DORELLO, presentata dal Socio F. TODARO.

Dopo che V. Baer nel pollo, e Bischoff nel cane, notarono che la vescicola cerebrale posteriore presenta durante una determinata epoca del suo sviluppo delle ripiegature, che più tardi scompaiono completamente, le ricerche su queste formazioni caratteristiche si sono fatte sempre più numerose, ed in modo vario si è tentato di dare una spiegazione morfologica del loro valore.

Già Remak nel pollo aveva potuto rilevare che vi era una certa corrispondenza tra queste pieghe, gli archi viscerali ed i nervi craniali.

Ma colui, che per primo descrisse accuratamente i rapporti tra queste pieghe e gli abbozzi dei nervi craniali, fu il Béraneck, che studiò l'argomento prima nella lucertola e poi nel pollo.

Orr, nel 1887, dette a queste pieghe il nome di neuromeri, e ne descrisse accuratamente la costituzione istologica. Seguirono poi le ricerche di Hoffmann, di Mc. Clure, di Wakers, di Zimmermann, di Locy, di Hill, di Froriep e di molti altri, fatte su materiale molto numeroso e con intendimenti e risultati molto differenti.

Si scoprì che l'abbozzo del sistema nervoso centrale poteva presentarsi segmentato, quando ancora si trovava allo stato di doccia largamente aperta e questa neuromeria si chiamò primaria per distinguerla da quella, che si ha quando il tubo midollare è chiuso, e che fu detta secondaria. Ma non si potè dimostrare la omologia e la corrispondenza delle due neuromerie.

Si cercò di determinare il numero dei segmenti cerebrali, ma anche nello stesso romboencefalo, in cui la metameria è più netta, i risultati non furono concordi.

La maggior parte degli autori riscontrò nel romboencefalo la presenza di sette segmenti; alcuni però ne distinsero solo sei, altri un numero maggiore di sette.

Anche i rapporti degli encefalomeri cogli abbozzi dei nervi craniali e colla vescicola auditiva non sono stati da tutti gli autori descritti nello stesso modo, anzi vi fu anche chi ammise che durante lo sviluppo questi rapporti potessero variare.

Ma le maggiori discordanze si ebbero nel modo di interpretare il valore morfologico di queste ripiegature della parete cerebrale, poichè di fronte agli

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia normale della R. Univ. di Roma.

autori, che credettero di poter attribuire a queste ripiegature un valore metamerico, ne abbiamo altri, i quali le ritennero come prodotti meccanici, dovuti sia al soverchio accrescimento della parete cerebrale entro uno spazio limitato, sia alla trazione esercitata dagli abbozzi dei nervi craniali, sia alla pressione dei segmenti mesodermali.

Avendo avuto occasione di studiare in una serie di embrioni di Plecotus, che va da uno stadio con cinque paia di protovertebre fino ad embrioni di nove millimetri di lunghezza, il modo col quale compaiono, si sviluppano e successivamente spariscono i segmenti del romboencefalo, ritengo opportuno riassumere in questa breve Nota i fatti osservati, tanto più che essi possono spiegarci la ragione per la quale alcuni autori si sono trovati in disaccordo nell'attribuire a determinati rombomeri gli abbozzi dei nervi craniali.

La prima manifestazione della divisione del romboencefalo in varî segmenti si riscontra in embrioni con sei paia di protovertebre, quando ancora l'abbozzo del sistema nervoso trovasi allo stato di doccia largamente aperta e si è appena accennata la divisione delle tre vescicole cerebrali primitive. A quest'epoca il romboencefalo per mezzo di tenui solchi esterni, ai quali corrispondono creste interne, si presenta diviso in tre segmenti, due caudali di grandezza presso a poco uguale, ed uno rostrale che ha una lunghezza doppia di quella dei segmenti. La costituzione istologica è uguale tanto nella parte media, che alle due estremità del segmento.

In embrioni con undici paia di protovertebre, quando l'abbozzo cerebrale si è trasformato in un tubo aperto solo nel neuroporo anteriore, e quando l'organo auditivo è rappresentato da un semplice ispessimento ectodermale, si trovano quattro segmenti romboencefalici, dei quali i primi tre, salvo l'avvenuta chiusura, sono identici a quelli osservati nello stadio precedente, mentre il più caudale si presenta di nuova formazione. Di questi quattro rombomeri il terzo presenta già ben distinto l'abbozzo gangliare dell'acustico, il quarto sta in stretto rapporto colla vescicola auditiva.

In embrioni con dodici paia di protovertebre è avvenuta la chiusura del neuroporo anteriore ed hanno incominciato a manifestarsi nei rombomeri le caratteristiche differenziazioni istologiche. Caudalmente ai quattro rombomeri osservati nello stadio antecedente se ne sono aggiunti altri due. Si hanno così ora sei rombomeri. Il primo, che è lungo circa il doppio degli altri, nella sua metà caudale sta in rapporto coll'abbozzo gangliare del quinto paio, il secondo non presenta abbozzo gangliare, il terzo sta in rapporto coll'acustico-faciale, il quarto col fondo della depressione auditiva.

In embrioni con ventidue paia di protovertebre si trova che il primo rombomero degli stadî precedenti e che si era sempre presentato molto più lungo degli altri, si è diviso in due, uno rostrale, che darà l'abbozzo cerebellare, ed uno caudale, che è rimasto in rapporto coll'abbozzo gangliare del quinto paio.

I successivi rombomeri quindi, senza cambiare affatto i loro rapporti, aumentano di uno il loro numero seriale: perciò, allo stato di massimo sviluppo dei rombomeri si ha che il primo è il cerebellare, il secondo è il rombomero del trigemino, il terzo è privo di abbozzo gangliare, il quarto appartiene all'acustico-faciale, il quinto sta in rapporto colla vescicola auditiva, il sesto porta l'abbozzo gangliare del glossofaringeo ed il settimo quello del vago.

Negli embrioni di cinque millimetri, poco dopo la comparsa del velo marginale, comincia la riduzione dei rombomeri, che si può dire completa in embrioni di nove millimetri.

Questa riduzione va di pari passo colle profonde modificazioni di forma che presenta il romboencefalo. Essa procede dapprima caudorostralmente, quindi scompaiono successivamente il settimo, il sesto ed il quinto rombomero.

Più tardi il terzo rombomero si ispessisce notevolmente, perde la sua forma concava, presenta una forte protuberanza entro la cavità del romboencefalo e gradatamente assorbe nel suo sviluppo anche il quarto, che così sparisce completamente.

L'ultimo a ridursi è il secondo rombomero, che corrisponde alla parte più dilatata del romboencefalo. La sua riduzione però non è completa, in quanto che la parte più dorsale di esso conserva la sua forma concava e si trasforma negli angoli laterali del quarto ventricolo e nella parte vicina dei recessi laterali.

Le osservazioni fatte negli embrioni di Plecotus mi permettono di venire alle seguenti conclusioni:

La rombomeria si inizia a tubo midollare aperto, *rombomeria primaria*, e si completa quando il tubo midollare si è chiuso, *rombomeria secondaria*.

Nel passaggio dalla rombomeria primaria alla secondaria, non succedono cambiamenti di rapporto colle parti vicine, ma le due rombomerie si comportano in modo che la rombomeria secondaria si manifesta come una ulteriore evoluzione della primaria.

La tardiva separazione del primo e secondo rombomero, che avviene quando già da molto tempo si sono resi evidenti i rapporti tra i singoli rombomeri ed i rispettivi abbozzi gangliari, ci dà ragione della diversità di vedute dei varî autori, i quali attribuirono lo stesso abbozzo gangliare ad un determinato rombomero, oppure al successivo, ovvero ritennero possibile che un determinato abbozzo gangliare durante lo sviluppo si spostasse da un rombomero all'altro.

I fatti da me osservati stanno a dimostrare come i rapporti tra abbozzi gangliari e rispettivi rombomeri si presentano costanti per tutta l'evoluzione dei rombomeri stessi.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

A. Rosati. — *Contributo allo studio cristallografico dell'Idocrasio del Vesuvio.* Pres. dal Socio Struever.

E. M.